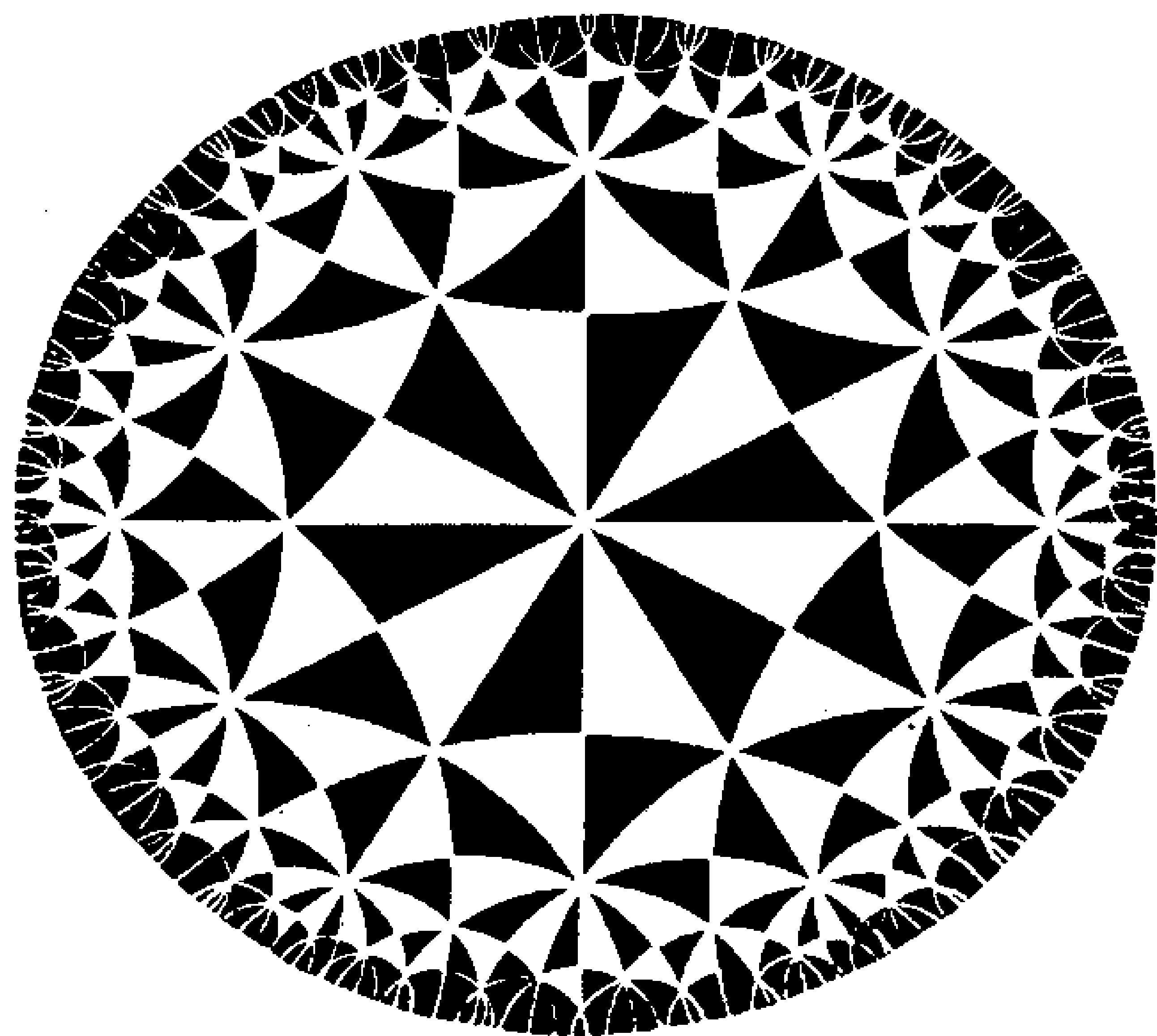
站在巨人的肩膀上

林恩·阿瑟·斯蒂恩编 胡作玄等 译 · 上海教育出版社



VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

Lynn Arthur Steen, Editor

On The Shoulders Of Giants

——New Approaches to Numeracy

National Academy Press

© 1990 by the National Academy of Sciences

根据国家学术出版社 1990 年版译出，

本书中文版权由上海市版权代理公司帮助取得



通俗数学名著译丛

站在巨人的肩膀上

林恩·阿瑟·斯蒂恩　编

胡作玄　邓明立　等译

上海世纪出版集团
上海教育出版社　出版发行

（上海永福路 123 号　邮政编码：200031）

各地新华书店经销　商务印书馆上海印刷股份有限公司印刷

开本 850×1156　1/32　印张 9.25　插页 4　字数 217,000

2000 年 7 月第 1 版　　2000 年 7 月第 1 次印刷

印数 1—5,100 本

ISBN 7-5320-6778-5/G·6934　定价（软精）：16.50 元

迎接2000数学年

陳省身 1997

译丛序言

数学，这门古老而又常新的科学，正阔步迈向21世纪.

回顾即将过去的世纪，数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位.数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透，并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献.同时，数学作为一种文化，已成为人类文明进步的标志.因此，对于当今社会每一个有文化的人士而言，不论他从事何种职业，都需要学习数学，了解数学和运用数学.现代社会对数学的这种需要，在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面，20世纪数学思想的深刻变革，已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路.面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法，门外汉往往只好望而却步.这样，提高数学的可接受度，就成为一种当务之急.尤其是当世纪转折之际，世界各国都十分重视并大力加强数学的普及工作，国际数学联盟(IMU)还专门将2000年定为**“世界数学年”**，其主要宗旨就是“使数学及其对世界的意义被社会所了解，特别是被普通公众所了解”.

一般说来，一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础.随着中国现代数学研究与教育的长足进步，数学普及工作在我国也受到重视.早在60年代，华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读

物,激发了一代青少年学习数学的兴趣,影响绵延至今.改革开放以来,我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力.但总体来说,我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距.我国数学要在下世纪初率先赶超世界先进水平,数学普及与传播方面的赶超乃是一个重要的环节和迫切的任务.为此,借鉴外国的先进经验是必不可少的.

《通俗数学名著译丛》的编辑出版,正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物,推动国内的数学普及与传播工作,为我国数学赶超世界先进水平的跨世纪工程贡献力量.丛书的选题计划,是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的.所选著述,基本上都是在国外已广为流传、受到公众好评的佳作.它们在内容上包括了不同的种类,有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用;有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧;有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系;……等等,试图为人们提供全新的观察视角,以窥探现代数学的发展概貌,领略数学文化的丰富多采.

丛书的读者对象,力求定位于尽可能广泛的范围.为此丛书中适当纳入了不同层次的作品,以使包括大、中学生;大、中学教师;研究生;一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益.即使是对于专业数学工作者,本丛书的部分作品也是值得一读的.现代数学是一株分支众多的大树,一个数学家对于他所研究的专业以外的领域,也往往深有隔行如隔山之感,也需要涉猎其他分支的进展,了解数学不同分支的联系.

需要指出的是,由于种种原因,近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气,有关选题逐年减少,品种数量不断下降.在这样的情况下,上海教育出版社以迎接2000世界数学年为契机,按照国际版权公约,不惜耗资购买版权,组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》,这无疑是值得称道和支持的举措.参加本丛书翻译的专家学者们,自愿抽出宝贵的时间来进行这类

通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作，同样也是值得肯定与提倡的.

像这样集中地翻译、引进数学科普读物，在国内还不多见.我们热切希望广大数学工作者和科普工作者来关心、扶植这项工作，使《通俗数学名著译丛》出版成功.

让我们举手迎接2000世界数学年，让公众了解、喜爱数学，让数学走进千家万户！

《通俗数学名著译丛》编委会

1997年8月

序　言

当今报纸的大标题充满了关于文盲、数盲以及教育衰退的其他迹象的报告.如果我们现在就开垦数学、科学以及所有其他学科的有效教育的土壤,明天的学校就会充满欣欣向荣的复兴景象.本书提供了适于明天学校的五种数学眼光,它们植根于想象中,于数学中,于科学中.本书中的想法能够为开发明天的数学智能的新方法提供肥沃的土壤.

由计算机、应用、统计数据以及学校本身创造的力量正在深刻地改变数学应用的方式、数学教学的方式以及数学学习的方式.甚至当我们努力使今天的学校产生不断增长的变化时,我们也必须考虑到将来可能发生的、实际上也是不可避免的更为显著的变化.为此,数学科学教育局(MSEB)判定,我们今天最紧迫的任务之一就是激发起对明天的课程富有想象的思维.

读者在本书中会发现,通过学校数学的可能的线索的五篇短文,可以看出其中表现的数学的丰富性.这些文章在数学作为模式的语言和科学的论点上加以展开,通过简单的文字加以论述,特别是强调其间相互联系和共同的想法.书中作者都被要求去开发深深植根于数学科学中的思想,而不必关注于当今数学或课程的局限性.但是,他们的确通过许多富有想象的例子提出从非正式的童年的探索一直到正式的学校和学院学习中,能够发展的数学思想.

本书的各篇论文打算成为激发对下一世纪的数学课程的创

造性研究的工具.这本书本身是由最近一系列出版物所激发起来的全国性关于数学教育的对话的一部分:

●《人人都会算:关于数学教育未来向国家做的报告》

●《学校数学的课程和评价标准》

●《全体美国人的科学》

●《改造学校数学:课程的哲学框架》

把这些出版物合在一起,提供了一个一致而紧迫的看法,它可以帮助美国恢复数学教育方面的崇高地位.

虽然本书中只讲了五个例子,但是肯定不只有这五种可能性.适合 21 世纪的课程必定包含大量线索,它们既反映出数学科学宽广的领域,也照顾到当地学校区的选择.我们提供这些课题并非是对课程做出确定的推荐,而是作为可能的样品,通过它们可激发人们开发出新的和富有想象力的大纲,使它们能够反映出数学内容的生动性和应用的广泛性.

虽然本书中,每篇论文都来自一位作者的手笔,但每篇都从许多顾问的建议和批评中获益匪浅.整体上,本书是在 1989 年 MSEB 课程委员会的支持下完成的.MSEB 课程委员会主席是贝尔通讯研究部已退休的助理副总裁亨利·O·波拉克(Henry. O. Pollak),这个顾问委员会其他成员包括:西谷学院的小瓦德·埃利斯(Wade Ellis, Jr)、哈佛大学的安德鲁·M·格里森(Andrew M. Gleason)、普林斯顿大学的马丁·D·克鲁斯卡尔(Martin D. Kruskal)、乔特·罗斯马利大楼的莱斯利·帕奥莱梯(Leslie Paoletti)、纽约州立大学巴法罗分校的安东尼·拉尔斯通(Anthony Ralston)、麻省理工学院的伊萨道尔·辛格(Isadore Singer)和芝加哥大学的查尔曼·尤西斯金(Zalman Usiskin),他们在本书启动阶段帮助它定型并使其步入正轨有很大的功绩.

随着本卷工作的开展,MSEB 建立了七个“咨询组”来审阅论文的草稿:一个咨询组负责综览一文,五个咨询组每个负责一篇主要论文,还有一个咨询组负责检查它们与科学的联系.负责

“模式”的咨询组成员有伊萨道尔·辛格和查尔曼·尤西斯金;“维数”的咨询组成员为火奴鲁鲁的约奥兰尼学校的大卫·马苏纳加(David Masunaga)和唐特哲斯大学的让·泰勒(Jean Taylor);“数量”的咨询组成员为哈维·凯因斯(Harvey Keynes)和纽约州立大学石溪分校的阿兰·塔克(Alan Tucker);“不确定性”的咨询组成员为美国电报电话公司贝尔实验室的詹姆斯·兰德威尔(James Landwehr)以及不列颠哥伦比亚的纳纳伊莫高中的詹姆斯·斯威夫特(James Swift);“形状”的咨询组成员为华盛顿大学的布兰科·格林鲍姆(Branko Grünbaum)和伊利诺州丁莱公园维克托·J·安德鲁高中的保拉·费兹莫利斯(Paula Fitzmaurice);“变化”咨询组成员为波士顿大学的罗伯特·德凡尼(Robert Devaney)和莱斯利·帕奥莱梯.全书科学咨询组成员为贝尔实验室退休主任威廉·O·贝克尔(William O. Baker),麻省理工学院生物学教授莫里斯·福克斯(Maurice Fox)和加州大学伯克利分校经济学教授拉尔·德布鲁(Gerard Debreu).

本书中的许多改进正是直接来自这些杰出的咨询组的审阅者的艰苦工作和良好想法.不过公平来讲,也应该承认,各位作者也不都总是注意他们的审阅者的意见,因此,我们真诚地感谢他们的帮助的同时,也应该指出,本书各篇论文中所表达的观点由作者负完全责任.

本书的出版使 MSEB 的第一阶段工作告一段落,这个阶段的工作向全国表达数学教学的新观点,如何使几个世纪的课程发展以应付下一千年的挑战.从 MSEB 1985 年成立时开始,MSEB 前主席,堪萨斯城的密苏里大学的舍尔利·希尔(Shirley Hill)就面对这个难题,迫使数学家和数学教育工作者一起思考数学课程的新线索.她在 MSEB 会上向我们所有人提出挑战,寻求比局限于算术的结构更能适应我们这个计算时代的想法,因为算术结构是从以前多少代传下来的,对它来说,计算是数学的首要目的.舍尔利坚持强调把课程改革植根于新涌现的数学实

践当中的重要性，本书可以说是她的这种努力的直接结果.

MSEB 的工作班子先是由玛丽莎·斯沃德(Mareia Sward)领导，现在由肯尼斯·霍夫曼(Kenneth Hoffman)领导，很能干地管理本书协调和出版工作的各个细节.还应该特别感谢林达·罗森(Linda Rosen)，她以一种永不消失的幽默感工作，从开始的计划会议到最后的美工、编辑和出版.还应感谢雅娜·古德塞(Jana Godsey)，她以坚韧和耐心收集本书的很多图片，对本书做出不可估价的贡献.托马斯·班卓夫(Thomas Banchoff)、大卫·莫尔(David Moore)在布朗大学研究生大卫·德·色丰内(Davide Cervone)的特别协助下，为本书提供大部分计算机绘制的美术作品.最后，玛丽·凯·彼德逊用 TEX 对多篇论文的草稿进行熟练的打印和校对，这对直接通过电子方式产生最后的文本是完全必要的.

林恩·阿瑟·斯蒂恩，编者
圣·奥拉夫学院

(赵慧琪)

目　　录

模式(林恩·阿瑟·斯蒂恩)…… 1
基础数学…… 3
五个样本…… 5
联系…… 6
获得视角…… 8
参考文献和推荐读物…… 9
维数(托马斯·F·班卓夫) …… 14
引言 …… 14
维数的阶梯 …… 16
赠予几何的礼物 …… 17
测量体积 …… 18
分解模型 …… 21
金字塔问题 …… 24
圆柱和圆盘 …… 27
可视化的维数 …… 29
增长因子 …… 30
比率和平均值 …… 32
画立方体 …… 33
不同维数的坐标 …… 39
数、直线和圆…… 39
长度和周长 …… 42

平面和曲面 …… 43
3维空间 …… 46
高维空间 …… 46
位形空间 …… 48
第4维 …… 50
静力学和动力学 …… 52
不同维数的切片 …… 54
来自高维的拜访者 …… 57
组合计数 …… 59
三角形计数 …… 60
正方形和正方体的计数 …… 62
寻求模式 …… 66
参考文献和推荐读物 …… 68
数量(詹姆斯·T·费) …… 71
学校数学中的数量 …… 72
技术的影响 …… 72
应用的影响 …… 75
心理研究的影响 …… 76
基本概念 …… 76
数及其运算 …… 77
变量与关系 …… 80
程序 …… 84
数的表示 …… 84
图象表示 …… 85
计算机表示 …… 87
算法 …… 88
概念知识和程序知识 …… 89
数字感觉 …… 90
符号感觉 …… 91

数系 …… 92
自然数和整数 …… 93
有理数 …… 95
实数 …… 96
复数 …… 97
新的数系 …… 98
应用 …… 100
建模 …… 101
测量 …… 101
目的 …… 103
参考文献和推荐读物 …… 104
不确定性(大卫·S·莫尔) …… 109
引言 …… 109
数据 …… 110
机遇 …… 111
计算器和计算机 …… 114
从数据到推断 …… 117
数据分析 …… 118
数据显示 …… 119
数据描述 …… 123
数学模型 …… 125
产生数据 …… 128
测量 …… 129
统计设计 …… 131
一些注意事项 …… 135
概率 …… 135
基础 …… 137
进一步研究 …… 140
转向推断 …… 142

推断 …… 144

贝叶斯的还是经典的？ …… 145

置信区间 …… 147

显著性检定 …… 150

统计思维 …… 153

参考文献和推荐读物 …… 156

形状(玛乔丽·塞内查尔) …… 159

引言 …… 159

分类 …… 161

命名 …… 166

分析 …… 169

发现对称性 …… 172

镜象几何 …… 173

应用对称性 …… 176

格子 …… 178

剖分 …… 182

组合工具 …… 183

表示 …… 185

模型 …… 185

地图 …… 186

阴影和透镜 …… 186

绘图 …… 189

图象重建 …… 191

计算机图形学 …… 192

可视化 …… 193

课程问题 …… 197

建立联系 …… 198

几何学 …… 201

形的学习 …… 204

参考文献和推荐读物…… 208
变化(伊安·斯图尔特) …… 211
变化的数学…… 212
式样的多样性…… 214
教学方法…… 215
描述的层次…… 217
种群动力学…… 218
增长的极限…… 218
分析的层面…… 219
动力系统…… 222
数值实验…… 223
无规则的果蝇…… 224
移向微积分…… 226
流星…… 228
稳定性…… 229
橡皮膜动力学…… 230
相图…… 233
共振…… 234
间隔和成团…… 236
老虎的条纹…… 237
居里是对的…… 238
居里是错的…… 238
图灵的老虎…… 243
结论…… 247
参考文献和推荐读物…… 248
传记…… 252
索引…… 255
致谢…… 273
译后记…… 276

模 式

林恩·阿瑟·斯蒂恩

“他只是比我们其他人看得更远，”这句话讲的是控制论专家诺伯特·维纳(Norbert Wiener).许多杰出科学家都打破了传统的束缚，创造出全新的数学领域供数学家去开拓，他就是其中的一位.数学家最擅长的就是看出并揭示隐藏的模式，每一个主要的发现都开辟新的领域，其中充满进一步开发的潜力.单单过去的一世纪，数学学科的数目就以指数增长.例如格奥尔格·康托尔(Georg Cantor)关于超穷集合的思想，索尼娅·柯瓦列夫斯卡(Sonja Kovalevsky)关于微分方程的思想，阿兰·图灵(Alan Turing)关于可计算性的思想，爱米·诺特(Emmy Noether)关于抽象代数的思想以及最近本努瓦·曼德尔布洛(Benoit Mandelbrot)关于分形的思想.

对于公众来说，这些新的数学领域还是未知的大陆.按照普通人的观点，数学是一门静止的学科，它的基础就是在中学课程算术、几何、代数和微积分中教的许多公式.但是数学远远超出公众的观点，继续以极快的速度发展，传播到许多新领域并大量产生新的应用.引导这种发展的不是计算和公式，而是永无止境地搜索模式.

传统上把数学描述为数与形的科学.学校强调算术和几何就深深植根于这种多世纪的认识之中.但是随着数学家开发的

领域扩张到例如群论、统计学、最优化和控制理论之中，数学的
[1] 历史边界已经完全消失. 同样数学的应用的边界也没有了：它不再只是物理学和工程的语言，现在数学已经成为银行、制造业、社会科学以及医药必不可少的工具. 如果从这个广泛的背景来观察，我们看到数学不只是讨论数与形，而且还讨论各种类型的模式和次序. 数与形——算术和几何只不过是数学家在其中研究的诸多媒体中的两个. 活跃的数学家总是在搜索不管是在哪里出现的模式.

藉助于计算机图形学，现在数学家搜索模式大都是靠真正亲眼所见来引导，而像高斯和庞加莱那样的 19 世纪数学巨人不得不依赖他们的心灵的眼睛来看. “我看见了”(I see)总有两种不同的意义：眼睛看见和心里理解. 几个世纪以来，在数学实践的阶层体系中，心灵支配着眼睛；时至今日，两者的平衡得到恢复，因为数学家已经找到新的方法来看模式，既用眼睛又用心灵.

数学实践的变化迫使我们重新考察数学教育. 不只是计算机，而且还有新应用和新理论使得数学在科学、企业和技术中的作用得到显著的扩展. 现在的学生已经使用计算机作为他们生活和工作的常规工具，他们必须学习一种同父辈所学的不同的数学. 正规的学校教学活动植根于几个世纪的传统，根本上说它不能让学生对于 21 世纪的数学需要有适当的准备.

当前数学教育的缺点也提供了强大的变革力量. 的确，因为新的发展建立在基本原理之上，正像许多观察家常常建议的，我们似乎首先应该集中精力把受过时间考验的基础的份量加以恢复，然后才能根据当代数学实践的变化着手进行改革. 公众对于强的基础课程的支持加强了过去的智慧——传统的学校的数学，如果细致地教、好好地学的话，就能对各行各业的工作和进一步学习基于数学的领域提供可靠的准备.

数学教育争论的关键不是要不要教基础课而是教什么基础

课以及如何教.数学实践的变化的确改变了数学教学重点的选择.社会的变化、技术的变化、学校的变化等等对于下世纪中学校数学可能出现什么也会产生巨大的冲击.所有这些变化都将影响学校数学的基础.

为了发展新的有效的数学课程,我们必须力图预见未来学生对数学的需要.正是数学当前和未来在工作中,在科学中,在 [2]
研究中的实践,将会塑造数学的教育.为了给未来提供富有成果的数学课程,我们必须在今天的数学中寻找模式,以便尽我们所能推断什么是真正的基础,什么不是.

基础数学

过去学校的传统把算术、测量、代数和一点粗浅的几何代表数学的基础.但是,作为数学的根系——把营养供给正在生长的数学分支和深刻的思想,还有更多更多的主题.我们可以想到特殊的数学结构:

- 数
- 形
- 算法
- 函数
- 比
- 数据

或者属性:

- 线性的
- 随机的
- 周期的
- 极大的
- 对称的
- 近似的
- 连续的
- 光滑的

或者行动:

- 表示
- 建模
- 控制
- 实验
- 证明
- 分类
- 发现
- 可视化
- 应用
- 计算

或者抽象：

- 符号　　　　● 等价
- 无穷　　　　● 变化
- 优化　　　　● 相似性
- 逻辑　　　　● 递归

或者态度：

- 惊异　　　　● 美
- 意义　　　　● 实在

或者行为：

- 运动　　　　● 稳定性
- 混沌　　　　● 收敛
- 共振　　　　● 分岔

[3] ● 迭代　　　　● 振动

或者一分为二：

- 离散对连续
- 有限对无穷
- 算法的对存在的
- 随机的对决定论的
- 精密的对近似的

这些不同的观点显示出数学的结构的复杂性．从每种观点，我们都能认出各种线索，其中每条线索都具有一定的力量使我们能够从孩提时期的日常的直觉，经过学校和学院一直到科学或数学的研究发展，形成有重要意义的数学思想．数学科学的健全的教育要求我们实际上同所有这些极为不同的观点和思想打交道．

传统的学校数学只选取极少几条线索（例如算术、几何、代数）并把它们水平地排列起来形成学校的数学课程，先是算术，接着是简单的代数，然后是几何，接着是更多的代数，最后好像是数学知识的典型——微积分．这种数学教育方法好像是一层一层蛋糕，它有效地防止日常的直观沿着数学的多条根发展起

来.此外,它还加强了这样的趋势,就是在设计每个课程时主要目的是给下一门课程做准备.这使得学数学在很大程度上成为以后才得益的练习.为了帮助学生看清他们自己数学的前景,我们需要把课程编排得更具有垂直的连续性,使得在孩子的教育经验中能把数学的根与数学的分支联系在一起.

学校数学常常被看成人力资源的管线,它从儿童时代的经验流向科学的生涯.数学课程的各层面对应于管子越来越窄的截面.假如他们要在数学和科学教育上有所进步的话,就必须通过这些截面.任何学习上的障碍都会限制水流在整个管线中流动,而这种障碍相当多,就像血液中的胆固醇一样.数学也会堵塞国家教育的动脉.

反之,如果数学课程以多重并行线索为特征,每一个线索都奠基于适当的儿时经验,那么人力资源的流动就更像大树中根中营养物的运动或者从广大流域冲出的水流,而不像一个越来越狭窄的动脉和管线那样受到局限.各种不同的数学经验吸引着有不同兴趣和天赋的孩子,每种经验都由挑战性的思想所培育,它们激发起孩子们的想象,促进孩子们进行探索.这种集体效果将在孩子们身上发展出来由许多不同的根所产生的各种各样的数学观点. [4]

五 个 样 本

本书提供5个例子说明深刻数学思想的发展威力,它们是:维数、数量、不确定性、形状和变化.每一章都挖掘大量模式,使得它能给在学校各阶段的孩子们引进,特别是给仍然保持较高的无拘无束好奇心的最年幼的孩子们引进,开发课程的老师会发现在这些论文中有许多可用于学校数学的有价值的新选择,那些帮助制定教育政策的人能在这些论文中看到新的卓越标准的例子,每一位家长都能在这些论文中发现重要的和有效的数学实例,能够激发他们孩子的想象力.

每一章由一位杰出学者撰写，他用日常的语言来解释深深植根于数学科学的基本思想如何能在未来的学校中开花结果．虽然每篇论文并不局限于当前课程的特殊细节，但它紧贴从儿童时期到成人时期数学思想的发展．作者们在表达数学思想这些极为不同的线索时，他们都树立应该如何在孩子们当中发展数学思想的理想．

与许多当前学校数学不同，这些线索通过行动活生生地展示出来：用倒水来比较容积，用摆来钻研动力学，用数糖果的颜色来掌握变化，用造万花筒来发掘对称性．许多数学都能早在孩子们达到理解代数公式之前就通过这些活动不拘形式地掌握了．对于像体积、相似性、大小、随机性这些模式的早年经验给学生们做科学探索和学习更正式、逻辑上更精确的数学提供了准备．在几年之后，课堂中出现细致的证明时，从大量非正式的早期数学经验受益的学生会极为开心地说“现在我看出为什么那是对的”．

联　　系

本书的论文是由 5 个不同的作者写作的 5 个不同的主题．尽管它们在主题、风格和方法上有所不同，但这些论文在数学亲缘关系上却有着共同点，每篇论文都同数学科学家族有着千丝
[5] 万缕的联系．因此这些论文本身在深层结构甚至在特殊的例证上都充满了内在联系就一点也不奇怪了．下面举一些例子：

测量是在这些论文中反复讨论的思想．我们对几何量（长度、面积、体积）、算术量（大小、次序、标签）、随机变量（掷硬币、学业能力测试得分）以及动力变量（离散的、连续的、混沌的）的各种经验都为回答一个非常孩子气的问题“它多大?”提出了特殊的挑战．从许多例子中可以看出，这个问题是基本的：它看起来简单却微妙，初等却困难．学生认识到了测量的复杂性，长大之后再碰到通常对数和统计错误的使用就不再会那么不加考虑地接受下来．学习如何测量是数觉的开始．

对称是数学的另外一个深刻的思想，它无论在这些论文中还是在数学的所有分支中都不断地反复出现，有时它是整体的对称，例如超立方体（一个 4 维立方体），它的对称太多了以致很难把它们全部数清（但小孩在适当的引导之下，利用简单的豌豆和牙签模型能够办到）．也有时，它是部分的对称，就像由分子或细胞重复模式中天然物体的生长．还有另外的情形出现对称破缺，例如圆柱形杆的弯曲或受精卵发育成一个（稍微）不对称的成年动物．与测量不同，对称性在任何一级学校中都很少学习，然而它作为解释许多现象的模型是同样基本的，即使现象可以如此不同，如基本的自然力、晶体的结构和有机体的发育．学会认识对称性使我们的数学眼力得到训练．

可视化在本书中许多例子中反复出现，它是数学和科学研究最迅速增长的领域之一．数据分析的第一步是把数据直观可见地展示出来，以求出隐藏的模式．各种类型的图象提供了关系和函数的可见的展示，它们在科学和工业中广泛地应用以显示一变量（例如销售）是另一变量（例如广告）的函数．许多世纪以来，艺术家和地图绘制者利用投影等几何工具来把 3 维图象表示在 2 维幕布或纸张上．现在计算机图形学把这些过程自动化，使我们同样能发掘高维空间中形状的投影，学会把数学模式可视化，使视觉的天赋成为数学教育无价的盟友．[6]

算法是计算的处方，它出现在数学的每一个角落，表现人口增长的迭代步骤，揭示出一个简单有序的事件如何导致各种各样的行为——爆发、衰落、重复、混沌．发掘几何形式的组合结构能使学生设想高维空间的几何结构，而在高维空间中他们不能建立现实模型．甚至通常小学中算术的算法从当代的数学观点看，也有新的含义，它与其说是强调去掌握特殊算法——这些现在主要由计算器或计算机来执行——学校数学更强调算法的更基本的属性（例如速度、有效性、敏感性），这些对于在计算机时代更高明地使用数学是必不可少的，学习算法的思考构成当代的数学能力．

在本书中也出现许多其他的主题,包括数学与科学的亲缘关系.分类作为理解的工具,从公理和数据进行推断,以及最重要的在学习数学的过程中开发的作用.由联系得出数学的威力也有助于判定什么是基本的.从教育学的观点看,联系使我们把由一条线索得出的见识溶入到其他线索中去.多重线索通过强有力的内在联系联结在一起能使我们开发具有各种各样兴趣和能力的学生的数学能力.

获 得 视 角

牛顿把他发展微积分的超人先见之明归功于他的前辈工作的积累:"如果说我比别人看得更远,只因为我站在巨人的肩膀上."那些为 21 世纪开发数学课程的人也需要类似的先见之明.

牛顿时代的数学变化可不像近年来那么大.很大程度上由于计算机的引进,数学的本性和实践已被新概念、工具、应用和方法从根本上改变了.正如伽利略时代的望远镜使牛顿的革命得以成功一样,今天的计算机向传统观念挑战,并强迫我们对内心深处信奉的价值重新加以检验.正如 300 年前由欧几里得的证明转变为牛顿的分析,数学再一次对于过程范式进行一次基本的重新定向.

在数学的研究文献中和数学方法的实际应用中,基本变化
[7] 的实例大量存在.本书的各篇论文中给出了许多:

- 不确定性不是偶然的,因为最终要出现规律性
- 决定性现象常常显示出随机的行为
- 维数性不只是空间的一个性质,而且还是整理知识的一种方法
- 重复可以是精密性、对称性或混沌的源泉
- 可视的表示能够产生往往被严格的解析方法掩盖起来的见识
- 变化的各种模式产生显著的基本的规律性

通过考察数学的许多不同的线索，我们对于共同的特色和主导的思想得出反复出现的概念(例如数、函数、算法)，使我们注意到为了理解数学我们必须知道什么；共同的行动(例如表示，发现，证明)指示出为了做数学我们必须发展的技艺.概念和行动是数学语言的名词和动词.

人们用数学语言干的事就是描述模式.数学是一门开发性的科学，它谋求理解任何一种模式——出现在自然中的模式，人脑所发明的模式，甚至由其他模式所创造的模式.为了使孩子在数学上成长起来，必须向他展示丰富的大量的适合他们自己生活的模式，通过这些模式他们能够看到多样性、规律性以及相互联系.

本书的5篇论文提供了5个广泛的案例研究，它们通过实例说明这是如何做的.其他作者同样能够容易地描写5个或10个另外的例子.下面列举的书和文章充满了丰富的数学思想的更多的例子.学习数学主要不在于开发什么样的特殊的模式，而在于这些线索中所呈现的充分多样性和深度.通过鼓励学生开发那些业已证明具有威力和意义的模式，我们为他们提供广阔的肩膀，站在肩膀之上，他们就能比我们看得更远.

参考文献和推荐读物

1. Albers, Donald J. and Alexanderson, G. L. *Mathematical People: Profiles and Interviews*. Cambridge, MA: Birkhauser Boston, 1985.
2. Barnsley, Michael F. *Fractals Everywhere*. New York, NY: Academic Press, 1988.
3. Barnsley, Michael F. *The Desktop Fractal Design System*. New York, NY: Academic Press, 1989.
4. Brook, Richard J., et al. (Eds.). *The Fascination of Statistics*. New York, NY: Marcel Dekker, 1986. [8]
5. Campbell, Stephen K. *Flaws and Fallacies in Statistical*

Thinking. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1974.

6. Davis, Philip J. and Hersh, Reuben. *Descartes' Dream: The World According to Mathematics*. San Diego, CA: Harcourt Brace Jovanovich, 1986.
7. Davis, Philip J. and Hersh, Reuben. *The Mathematical Experience*. Boston, MA: Birkhauser, 1980.
8. Devaney, Robert L. *Chaos, Fractals, and Dynamics: Computer Experiments in Mathematics*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1990.
9. Dewdney, A.K. *The Turing Omnibus: 61 Excursions in Computer Science*. Rockville, MD: Computer Science Press, 1989.
10. Ekeland, Ivar. *Mathematics and the Unexpected*. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1988.
11. Fischer, Gerd. *Mathematical Models from the Collections of Universities and Museums*. Wiesbaden, FRG: Friedrich Vieweg & Sohn, 1986.
12. Francis, George K. *A Topological Picturebook*. New York, NY: Springer-Verlag, 1987.
13. Gleick, James. *Chaos*. New York, NY: Viking Press, 1988.
14. Guillen, Michael. *Bridges to Infinity: The Human Side of Mathematics*. Boston, MA: Houghton Mifflin, 1983.
15. Hoffman, Paul. *Archimedes' Revenge: The Joys and Perils of Mathematics*: New York, NY: W. W. Norton & Company, 1988.
16. Hofstadter, Douglas R. *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*. New York, NY: Vintage Press, 1980.
17. Holden, Alan. *Shapes, Space, and Symmetry*. New York, NY: Columbia University Press, 1971.

18. Huff, Darrell. *How to Lie with Statistics*. New York, NY: W. W. Norton & Company, 1954.

19. Huntley, H.E. *The Divine Proportion: A Study in Mathematical Beauty*. Mineola, NY: Dover, 1970.

20. Jaffe, Arthur. "Ordering the Universe: The Role of Mathematics." In *Renewing U. S. Mathematics: Critical Resource for the Future*. Washington, DC: National Academy Press, 1984, 117 - 162.

21. Kitcher, Philip. *The Nature of Mathematical Knowledge*. New York, NY: Oxford University Press, 1983.

22. Kline, Morris. *Mathematics and the Search for Knowledge*. New York, NY: Oxford University Press, 1985.

23. Lang, Serge. *MATH! Encounters with High School Students*. New York, NY: Springer-Verlag, 1985.

24. Lang, Serge. *The Beauty of Doing Mathematics: Three Public Dialogues*. New York, NY: Springer-Verlag, 1985.

25. Loeb, Arthur. *Space Structures: Their Harmony and Counterpoint*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1976.

26. Mandelbrot, Benoit B. *The Fractal Geometry of Nature*. New York, NY: W.H. Freeman, 1982.

27. Moore, David S. *Statistics: Concepts and Controversies, Second Edition*. New York, NY: W.H. Freeman, 1985.

28. Morrison, Philip and Morrison, Phylis. *Powers of Ten*. New York, NY: Scientific American Books, 1982.

29. Peitgen, Heinz-Otto and Richter, Peter H. *The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems*. New York, NY: Springer-Verlag, 1986.

30. Peitgen, Heinz-Otto and Saupe, Dietmar (Eds.). *The Science of Fractal Images*. New York, NY: Springer-Verlag, 1988. [9]

31. Peterson, Ivars. *The Mathematical Tourist: Snapshots of Modern Mathematics*. New York, NY: W.H. Freeman, 1988.

32. Rosen, Joe. *Symmetry Discovered: Concepts and Applications in Nature and Science*. New York, NY: Cambridge University Press, 1975.

33. Rucker, Rudy. *Infinity and the Mind: The Science and Philosophy of the Infinite*. Boston, MA: Birkhauser, 1982.

34. Rucker, Rudy. *The Fourth Dimension: Toward a Geometry of Higher Reality*. Boston, MA: Houghton Mifflin, 1984.

35. Senechal, Marjorie and Fleck, George (Eds.). *Patterns of Symmetry*. Amherst, MA: University of Massachusetts Press, 1977.

36. Sondheimer, Ernst and Rogerson, Alan. *Numbers and Infinity: A Historical Account of Mathematical Concepts*. New York, NY: Cambridge University Press, 1981.

37. Steen, Lynn Arthur. *Mathematics Today: Twelve Informal Essays*. New York, NY: Springer-Verlag, 1978.

38. Steen, Lynn Arthur. "The Science of Patterns." *Science*, 240 (29 April 1988), 611 – 616.

39. Steinhaus, H. *Mathematical Snapshots, Third American Edition Revised and Enlarged*. New York, NY: Oxford University Press, 1983.

40. Stevens, Peter S. *Patterns in Nature*. Boston, MA: Little, Brown & Company, 1974.

41. Stewart, Ian. *The Problems of Mathematics*. New York, NY: Oxford University Press, 1987.

42. Stewart, Ian. *Does God Play Dice? The Mathematics of Chaos*. Oxford: Blackwell, 1989.

43. Tanur, Judith M., et al. (Eds.). *Statistics: A Guide to the*

Unknown, *Third Edition*. Laguna Hills, CA: Wadsworth, 1989.

44. Tufte, Edward R. *The Visual Display of Quantitative Information*. Cheshire, CT: Graphics Press, 1983.
45. Wenninger, Magnus J. *Polyhedron Models for the Classroom*, *Second Edition*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1975. [10]

（胡作玄）

维　数

托马斯·F·班卓夫

引　言

150年前，“幼稚园”一词的发明者弗利德里希·弗洛贝尔(Friedrich Froebel)(图1)设计了一组“礼物”，引导孩子们得出几个不同维数的几何的观念.他的哲学很清楚，如果孩子们在他们教育的最初阶段就鼓励他们去观察几何对象，那么在他们上学的过程中，这些思想就会一而再、再而三地反复出现，并在每个新的、更高级的层次上深化.随着学生在发展算术和测量的新技能，后来又学会更正规的代数和几何知识，他们在托儿所阶段对于形状和形体的初步体会就会变得更为精致.

弗洛贝尔为了抓住他年轻学生们的想象力，他在儿童乐园中给他们展示一系列木制玩具供他们玩.只有在以后，这些由这组有意安排的游戏经验所得到的体会才转变成为概念，而在更晚才正式表述为数学的语言.通过这种途径，他们培养起可视化能力，而这在把数学应用于科学和艺术事业上是至关重要的.

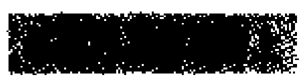
弗洛贝尔从数学最具体的对象开始：球、立方体、圆柱.他进
[11] 而通过给孩子们展示用托盘上的拼图来提高抽象的水平.然后他引进一套一套各种长度的小棍，摆放好使得它们最后能同数的模式联系起来，这样他达到更进一步的抽象.

在今天的幼稚园的教室里，我们也能认出有一些弗洛贝尔的遗产得到具体实现．在教室里有组块来组装，在桌子上有拼板来创造拼图．但是，当孩子进入小学的严肃世界当中，他们往往就把这些“玩具”丢在一边．许多杆用来做算术练习，但是如果学生能在幼儿园到初中之间看到 2 维的任何东西，那他就是幸运的了．在这期间，可能有人简单提到平面图形的面积，常常只是为了注明测量的公式．于是学生必须等到了中学才能得到平面几何世界的进一步思想．



图 1 弗利德里希·弗洛贝尔，幼稚园的发明者，使用几何对象来激发孩子们的想象．

两代人之前，这些吃苦耐劳的学生只有学了一年的形式几



何之后，才准许在一学期更为形式化的立体几何中再次进入第
[12] 3 维.后来课程改变了，3 维的几何（连同全部解析几何）被认为都可以纳入单一的几何学课程.往往立体几何部分只是被当成有点课余时间的有兴趣的学生的补充教材.无需多说，立体几何就这样从标准的几何教程中消失掉了.在当前，为了在学生上大学之前匆匆忙忙为学微积分做准备，我们系统地偷工减料，完全不管整个几何学中最实用而且最有用的部分——我们自己维数的几何学，现在我们有特别的机会来重新关注不同维数的几何学.

维数的阶梯

虽然我们世界的维数是 3 维的，可是大多数媒体却碰巧都是 2 维的：黑板、书、电影、电视和计算机屏幕.我们全都投入大量精力来学习如何解释这种平面视觉信息.我们生活在 3 维世界当中，就必须知道 2 维形状如何相关：它们的行为为完全了解我们自己的维数提供了必要的前提.

碰巧，通过更低一维的直线的几何学，我们已得到大量的认识，因为在 1 维中数与几何最密切、最有力地融合在一起.数直线的几何可以漂亮地翻译成平面几何，不管是以经典的形式还是以数对的解析几何.我们从第一维过渡到第二维所获得的动量能够把我们带进我们自己的维数并得到更新的视角.维数的类比是非常有力的工具.

这个激动人心的主题是值得认识并传给我们的学生的：把我们从 1 维带到 2 维并进而带入 3 维的动力并不停留在此！这种建议很明确：还有其他维数有待开发.数学是使得提高维数的电梯运行的关键.

特别是第 4 维，它是我们最近的近邻之一.正如我们可以由学习其他国家的语言的文化掌握许多我们自己的语言和文化一样，我们能够通过观察引导到第 4 维的结构而开始理解我们自

己的"现实"世界的新事物.虽然我们不能从身体上开发更高维数,但可从心灵上理解它们,并且通过现代技术,也能越来越多地看见它们. [13]

对于语言习得的研究表明,虽然任何幼儿能够学习任何语言,小孩总是更快地建立自己特殊语言的声音模式,而且有效地阻碍其他可能性的发展.如果小孩不是很早就引导去熟悉其他语言,他或她在学习第二语言时就会经历更多的困难.对于数学的知觉是否可能也是一样?假如我们等到学生已经发展大量的算术思想(以及大量的错误观点),然后才鼓励他们思考立体的对象以及不同维数之间的相互关系,我们就可能剥夺了他们认识几何学的整个威力和范围的机会.

赠予几何的礼物

对象总是近在手边.在任何级别的学校,对空间和体积的觉察应该是一种连续不断的数学经验.像测量的量以及它们同公式的联系将在适当的时候出现,但是它们总是出现在孩子们首先觉察到测量的不同维数之后.学生头一次被鼓励考虑体积表示什么意思的那天往往就是人们告诉他或她球或圆锥体积公式的同一天.为了鼓励学生流利地使用几何语言,在整个在校期间我们需要大量的"前几何学",其中应该包含"前立体"几何以及"前平面"几何.

弗洛贝尔以及他的同行用他们当时能得到的材料创造出几何礼物,主要是用木头、纸和泥土.今天我们有许多办法从各方面改进这些礼物,我们可以用塑胶和维可牢(velcro),用磁带和磁铁,更不用说强有力的计算机图形学.如果在年轻学生面前放置的探维的工具,不仅是最简单的形式,而且还有较高维空间的几何学,教育家的术语"教具"——教室工具现在有了新的意义.如果我们关注教育我们的孩子,关注空间的知觉,我们就会创造真正激动人心的教具.这是我们今天的几何礼物.

测 量 体 积

许多学生从来没有学过体积,因为他们不能成功地越过平面几何.那些通过迅猛冲刺就能达到微积分的学生,没有多少时间或者根本没有时间来学习使微积分繁荣发展的几何思想.微
[14] 积分并不是学生第一次认真思考几何学的合适时间,它更应该是经年累月考虑越来越复杂的几何课题积累的结果.当学生最后看到锥体或球的体积公式的完整证明,这应该是他或她从幼稚园开始经过学校摆弄锥体或球的所有经验中隐涵的约定中得到了满足,成为顶尖的经验.

弗洛贝尔的小学生们花了大量时间倒水和筛沙子,用不同的容器盛上不同量,因此学生们会逐渐学会共同的关系,甚至没有想到把它们写下来.例如,用多少圆锥形杯子的水才能把同高同底的圆柱形的杯子倒满.任何学生都能用一排这样的杯子来进行实验(图 2),圆柱可以倒满三个圆锥形的杯子.

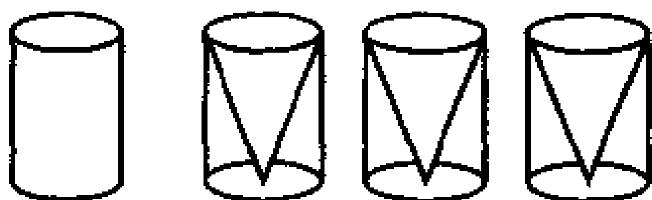


图 2 圆柱体中的水正好装满3个同底和同高的圆锥体.

我们可以用不同高度和不同的圆口杯反复地验证这个结果.只有到以后学生熟悉了分数的语言之后,这个关系才需要用一个体积等于另一体积的$\frac{1}{3}$来陈述.再往后,这个关系才能用一个公式表示:圆锥的体积等于底面积乘以高度的$\frac{1}{3}$.

这时,对于其他形状的物体,应该也看到同样的关系.三个方底的棱锥可被同底同高的棱柱中的沙子所灌满(图 3).甚至于底的形状不规则,这个关系也成立.我们甚至不要求锥底的中

心与锥的顶点对齐，如果锥底有中心的话.所有这些可在学生尚不知分数为何物之前就被理解，更不用说需要预先知道像 π 这样的数了.

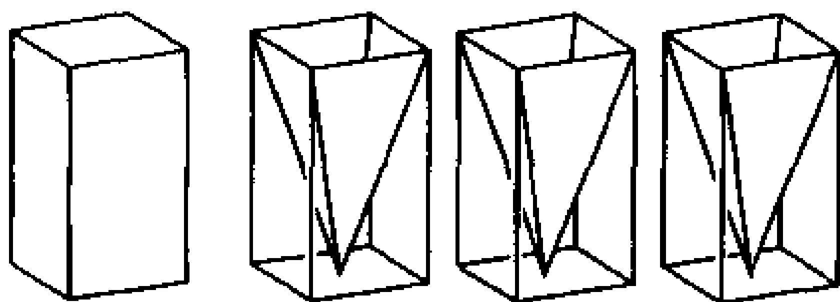


图 3 棱柱中的水正好可装满3个同底同高的棱锥.甚至棱柱和棱锥的底为不规则形状这个关系也成立.小孩子只要通过倒水和倒沙子就能发现这种关系. [15]

在阿基米德的墓碑上画的图形反映的关系稍微复杂一些，也更给人留下深刻印象：如果一个球体精确内切在一个圆柱体中，则球体的体积是圆柱体体积的$\frac{2}{3}$.为了证明这点，我们可以用两个圆柱(它正好封住球)的水能把3个球装满(图 4).不规则

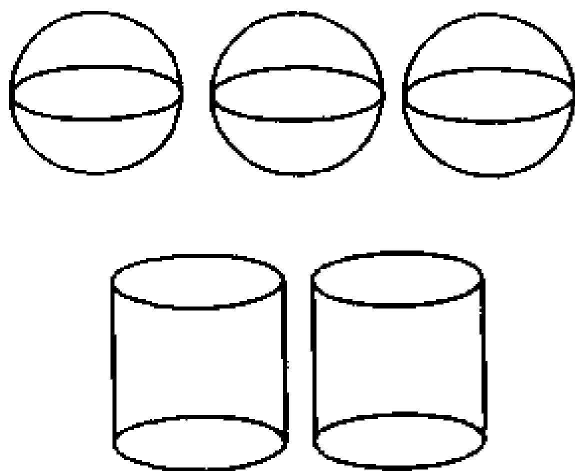


图 4 倒水可以验证阿基米德定理：3 个球的体积等于 2 个圆柱的体积，该圆柱的直径和高均等于球的直径.

形状的物体体积可以很容易地看出来，只要把它们浸没在水中看有多少水溢出即可．由此自然得出密度的概念，也就是重量与体积之比．

通过体积也可以引进面积的概念．用一堆浅盘，全都一样高，孩子们能够比较它们的体积，并且把它们的体积和底面积联系起来．假如在任何情形下，盘子高度都一样，高度维数就可以“淘汰掉”．在这种情况下，孩子们不难看出直角三角形的面积等于相应长方形的面积的一半，而斜角三角形的面积等于三个不同相关的平行四边形的面积的一半(图 5)．

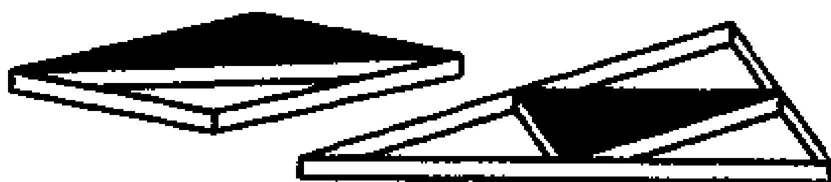


图 5　孩子们通过向浅盘子里倒水，马上可比较不同几何图形的面积．



图 6　在正方形框架中4个直角三角形揭示出毕氏定理的证明：直角三角
[16] 形弦上的正方形等于勾和股上正方形的和．

正如弗洛贝尔在上个世纪用幼稚园礼物所做的一样，我们也可以用均匀厚度的砖来做．学生们通过实际搬弄各种物体，就可能在很小时候懂得平行四边形和长方形面积的关系．用不着等到学生通过平方根之后，才能看到毕氏定理的图示(图 6)．孩子们玩过表示分解的几何游戏，以后就会觉得理解形式的结果更加容易．



分解模型

正如正方形用对角线可以分解成两个全等三角形(图 7),正方体也可以沿着对角线分解成三个全等的组块(图 8),这个事实是能用模块说明的最漂亮的结果之一.分解模型比起体积的比较说明更为深刻的思想,因为他们不仅显示关系,而且还表明为什么关系成立.学生最后应该能够看出,所有几何关系都有其理由.

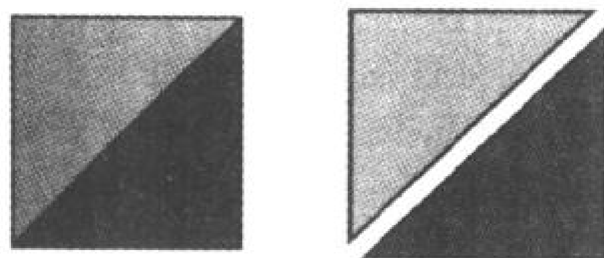


图 7　用对角线把正方体分解为两个全同的三角形可以作为3维类似分解的前景.

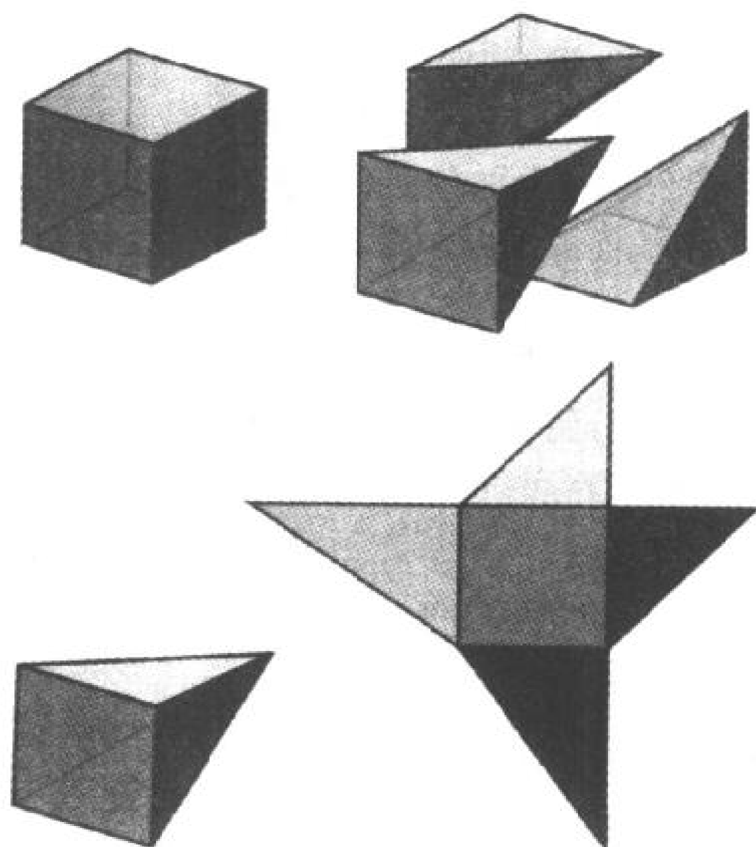


图8　正立方体沿对角线分解为全等棱锥可以用对应样板构成的模块来图示. [17]

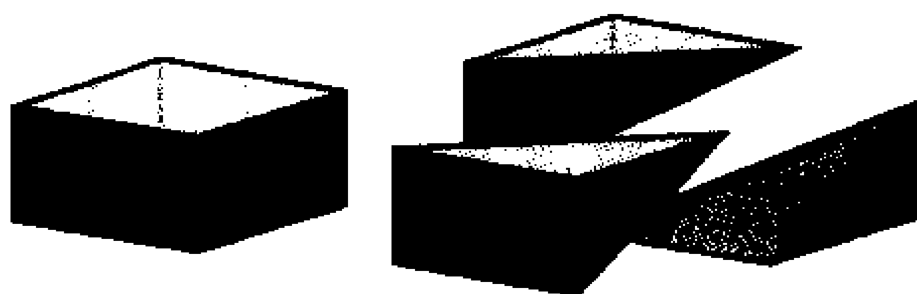


图 9　长方形的对角分解产生出三个棱锥具有不同的形状但具有相同体积.

立方体这个特殊的分解性质多少有点误导,因为对其他长方体并不成立.虽然对角线总把长方形分解为两个全等三角形,但长方体的对角线分解通常并不得出三个全等棱锥体(图 9),这 3 个棱锥体体积相等但形状不同,这可以从白塑料的棱锥容器中灌沙子看出.但是由另一个不同的模型——玩牌中可以得出更深刻的认识.

我们可以把棱锥看成由底上一叠长方形厚牌构成.假如这叠牌中每张牌厚度加倍,则底保持不变而这叠的高度和重量都加倍,从而其体积也加倍.如果我们保持每张牌宽度和厚度不变而长度加倍,那么体积也加倍.每个单维数的加倍都使体积加倍,更一般讲,用任何数乘以单维数将会使整个体积乘以相同的数.

这个过程使我们能够得出任何棱锥体的体积,这些棱锥体是通过长方体对角分解得出的,也就是每一个棱锥体具有长方形的底面,而其顶点在底面的某一角的正上方.进一步研究棱锥形的模块很快表明任何具有长方形底面的棱锥都可以由这些特殊类型的棱锥构成,它们全部具有相同的高度.把它们放在一起,这些演示表明为什么一般来讲,具有长方形底面的棱锥的体积为同底同高的棱柱的体积的$\frac{1}{3}$.

用一叠纸牌或细杆进行实验很容易导出一个强有力的思想,即数学家熟知的切变变换的卡瓦利埃利原理.首先观察排满

平行四边形的一组细杆何以能排满同底同高的长方形.因此它 [18]
们的面积必定相等(图 10).同样原理对空间也和对平面一样适用.能够装满长方形盒子的一叠纸牌也能装满同底同高的斜形盒子.同样,用接近构成正心棱锥的一组正方形牌可构成偏心棱锥.

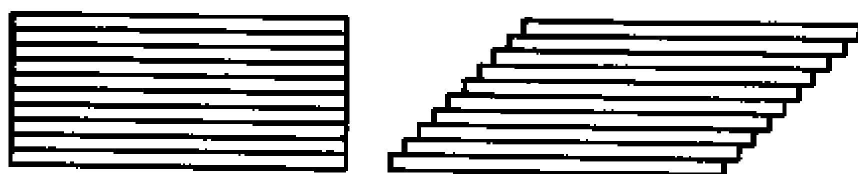


图 10 用于构造一个矩形的一组细杆,也可用于构造同一维数的平行四边形.因此这个矩形和这个平行四边形的面积必然相等.

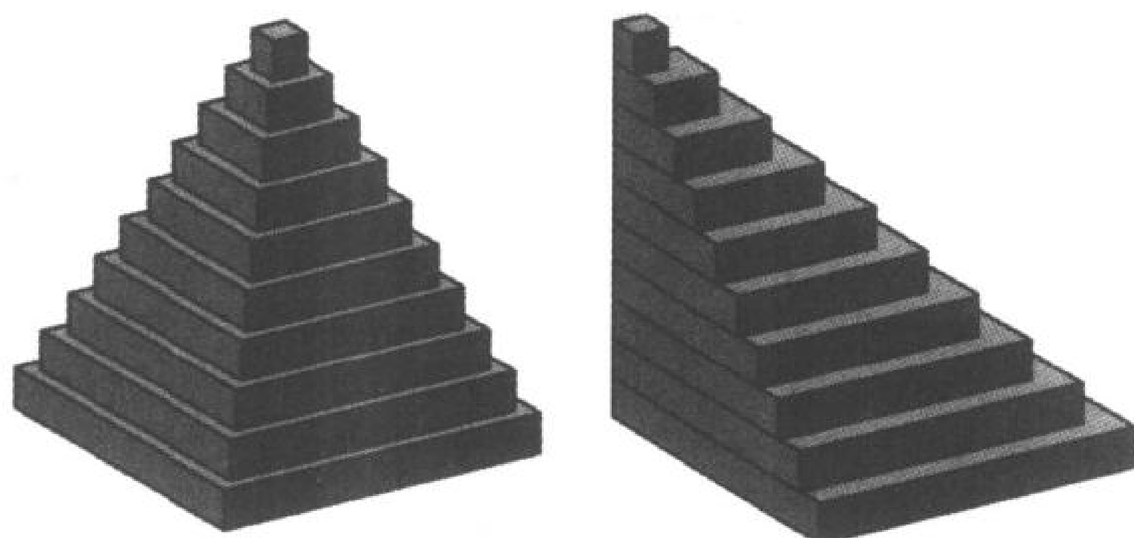


图 11 形成偏心棱锥的一组纸牌可以重排形成同底、同高、同体积的正心棱锥.

如果学生在整个早期学习阶段用模块组和纸牌探索过棱锥模型,那他们肯定在微积分的课程上更容易理解和领会这些定理的形式证明.而那些一直到微积分课讲体积之前还没有考虑
过体积的性质的学生就不会由他们的经验学到那么多东西.现 [19]
在我们需要花费大量精力来教学生,学会高等数学所需的代数

技能.我们应该同样关注他们的几何学的准备.

金字塔问题

许多孩子为胡夫大金字塔而着迷.这些古代世界硕果仅存的奇迹对它们的创造者来讲是数学的挑战,而且今天仍然是挑战.在学校中对古埃及遗迹的学习可以说是各种各样数学问题的源泉.从对阴影最初步的考察到早期测量最尖端的成就——平截头棱锥台的体积公式.

孩子们可以自己决定如何去造棱锥的模型.在一个正方形底面上一堆干沙子或湿沙子就是一个例子.另一个例子是用粘土做的模型.学生们可以用不同大小的三角形做实验,看看会得出什么形状的金字塔.

不同形状的其他遗迹也提供了类似的测量练习以及对建造的挑战.美国印地安人的墓冢或其他圆锥形状的结构是怎样的?玛雅的金字塔连同其阶梯结构又是怎样的? 巴比伦的多层神塔或高塔又是怎样的? 每一种结构都有不同的特色,它们引出有趣的数学问题可让学生们自己去表达和探索.

在学习古代遗物时,自然引出的一个关键的数学概念是相似性,它可通过代数方式用比或比例来表示,也可通过几何方式用阴影和标度图来表示.让我们看下面的故事:

> 我的朋友安布罗斯寄来他到埃及旅游的快照,他站在方尖塔旁,我能看见他的影子大约是方尖塔的影子的$\frac{1}{4}$.方尖塔是挺大的圆柱,超过 24 英尺高.我知道这个是因为我的朋友 6 英尺高.照片中还有一座金字塔.我能看出它的影子刚刚超过塔底的边界线.为了算出金字塔的高度,我还需要什么另外的信息? 我如何测量金字塔的斜侧与地面之间的角度?

实际上,早在学生们在几何和三角中正式讨论三角形之前很久,就可以非正式地讨论这些问题.

思考金字塔的问题就能表明不同维数的问题如何彼此互相启发.学生们利用相似性原理很容易计算一个不完全棱锥的体积(图 12).这是埃及数学最重要问题之一. [20]

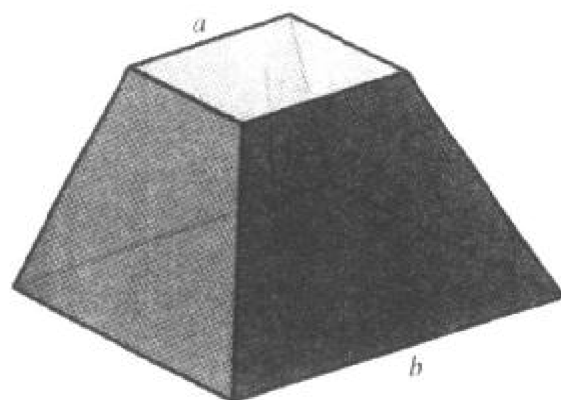


图 12 不完全(截头)棱锥提出挑战:求其体积.

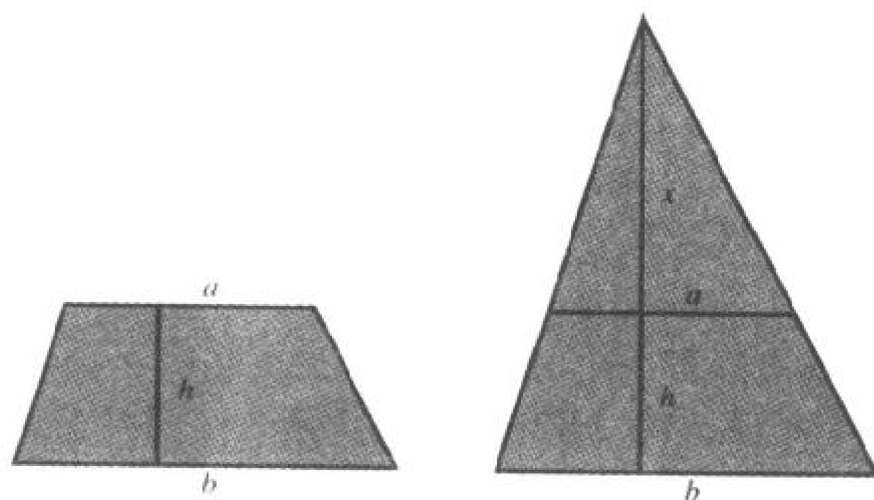


图 13 把梯形考虑成一个不完全三角形,我们可以找到求其面积的方法,它也可以用到 3 维来求不完全棱锥的体积.

我们开始先考虑平面中的类似问题:梯形可以看成一个不完全三角形(图 13).已知量 a,b 和 h,我们想求其面积.假定梯形不是平行四边形,我们可以把它补上一个三角形,其高为 x.

不难看出，大三角形和小三角形相似，从而$\frac{x}{a}=\frac{x+h}{b}$，因此$bx=ax+ah$，所以$x=\frac{ha}{b-a}$和$x+h=\frac{hb}{b-a}$，这样我们就有一个新的方法得出我们熟知的梯形面积公式，即它是两个三角形面积之差：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(x+h)b-\frac{1}{2}xa\\&=\frac{\frac{1}{2}hb^2}{b-a}-\frac{\frac{1}{2}ha^2}{b-a}\\&=\frac{\frac{1}{2}h(b^2-a^2)}{b-a}\\&=\frac{1}{2}h(b+a).\end{aligned}$$

我们可以用同样方法来计算不完全棱锥的体积(图 14).假如不完全棱锥的高度为h，它的顶部和底部正方形的边长为a和b.大棱锥的高度是$(x+h)$，它的整个体积是$\frac{1}{3}(x+h)b^2$，而
[21] 小棱锥的体积是$\frac{1}{3}xa^2$.由于三角形相似$\frac{x}{a}=\frac{x+h}{b}$，因此，正如平面情形$x=\frac{ha}{b-a}$和$x+h=\frac{hb}{b-a}$，因此不完全棱锥的体积为：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}(x+h)b^2-\frac{1}{3}xa^2\\&=\frac{\frac{1}{3}hb^3}{b-a}-\frac{\frac{1}{3}ha^3}{b-a}\\&=\frac{\frac{1}{3}h(b^3-a^3)}{b-a}\\&=\frac{1}{3}h(b^2+ab+a^2).\end{aligned}$$

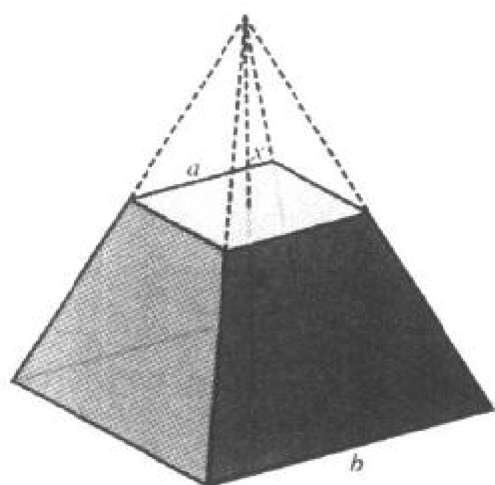


图 14　通过把不完全棱锥补全，其体积可以作为两个相似棱锥之差计算出来.

圆柱和圆盘

圆柱体中水的体积比起刚刚容下它的长方体盒子的体积来，大约为后者$\frac{3}{4}$多一点(图 15).

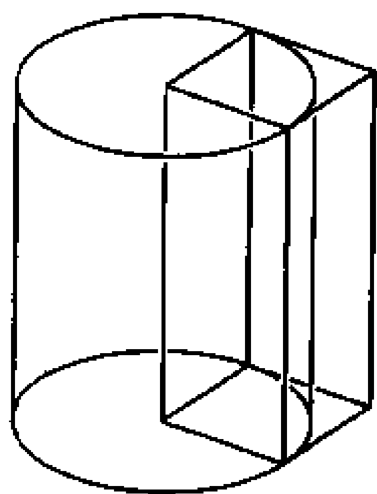


图 15　一组杯子，其中包括一个圆柱体和相配的 4 个同高的长方体盒子，4 个盒子的底面正好包住圆柱体的底面. 这组杯子能够用来证明圆柱的体积正好比 3 个盒子的体积大一点，因此圆柱体的圆底的面积比相应的正方形面积的$\frac{3}{4}$多一点.

假如我们把水从圆柱体倒入现在我们用的这种盒形容器中(它与圆柱体同高,底部正方形的边长等于圆柱体半径),那么我们可以装满 3 个这种盒子,还有水富余.用不同的圆柱体和相关的盒子进行实验很快地表明这个模式对于任何半径或高度的圆柱体都适用.自然,圆的面积和它的外切正方形面积也具有相同的比.因为孩子们测量可倒的量比测量涂色的面积要容易得多,因此,他们首先通过体积然后再通过面积掌握这个基本的比要
[22] 更为容易些.

周长的概念可以通过用绳子、皮带(一开始没有标记)来引进.不管砖的大小如何,围绕一块正方形砖的距离是砖的边长的 4 倍.如果一个圆盘的半径是另一个圆盘的两倍,则绕大圆的绳子正好绕小圆两周.绕一个圆盘的绳子将绕边长等于其半径的正方形 3 周多一点.关键的事实是,圆盘与正方形周长的比与圆柱和包围它的盒子的体积之比相等,这只有很晚才证明.但是圆盘的周长和正方形的周长之比固定这个基本思想却是每个孩子早在提到神秘的数 π 之前就应该懂得的.

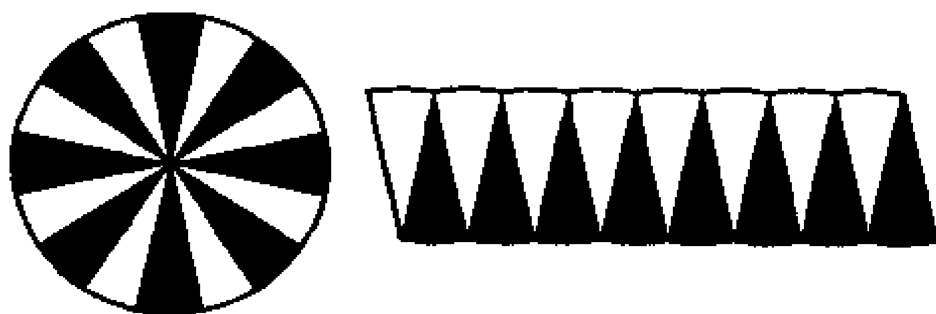


图 16　通过把一个圆切成薄饼形的小块,然后再把它们集合起来成为长方形的区域,孩子们可以马上看出圆的面积是半径(长方形的高)乘以圆周(长方形的宽)的一半.

通过把圆像切饼一样分成若干块,然后再把这些块集合成近似的长方形,就不难看出圆的面积和周长的关系.结果圆盘的面积等于这个近似长方形的面积,而长方形一边边长等于半径,



另一边长等于圆周的一半(图 16).要把圆盘分成更多份,这种对应就更为精密.(很久之后,学生们就会认识到隐藏在这个证明中的极限概念.)遗憾的是,在球的体积和长方体盒子的体积之间,似乎并没有这么好的对应关系. [23]

可视化的维数

弗洛贝尔幼稚园的孩子们玩立方体和再分割的立方体,玩方块和再分割的方块,玩直杆和再分割的直杆(图 17).8 个小立方体拼在一起形成一个大的立方体,它的长、宽、高都是原来小立方体的两倍.4 个正方块拼成一个大的正方块,它的长和宽是小正方块的两倍.两根细杆接起来形成一个细杆,它的长是原来的细杆长的两倍.

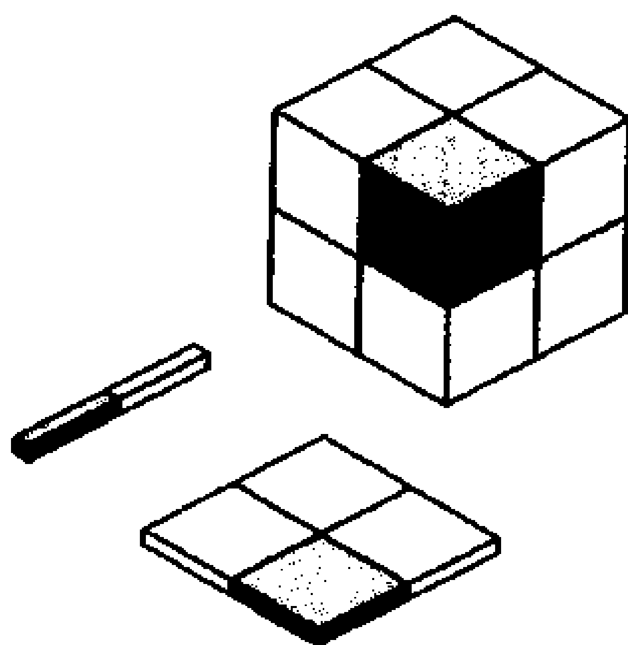


图 17　一套立方体、正方块和杆能形象表示因子加倍的基本性质:它们表示 2 的幂,随维数而不同. [24]

各个水平的孩子都能开发类似的练习.这里用一个卡片盒,包上纸,用绳子捆上.还有另一个盒子,两倍长,两倍宽,两倍高.

那我们得多用多少绳子来捆上，或者多少纸来包上它，或者多少沙子填满它？孩子用不着有测量长度或面积或体积的能力就能做实验并找到答案：需要 2 倍长的绳子，4 倍多的纸张，8 倍多的沙子．甚至在孩子有了足够的做乘法的经验之前，就能产生对于尺度变化的知觉，而且这种知觉能够加强对算术运算的理解．

增长因子

在低年级就碰到过尺度变化的孩子，在很久以后学习指数概念时，就会认识到在 3 维大小加倍时，导致其体积增加一个因子 2^3，而 2 维正方形大小加倍时，其面积增加一个因子 2^2．不管在 4 维空间中一个盒子意味着什么，指数使得这种加倍的模式十分清楚，它能预言其大小增加一个因子 2^4．

因此，每一维数都对应其自身的增长指数．一个令人惊异的事实是，有的几何对象其增长指数不是整数，这些奇怪的对象具有一种"分数维"，它们是令人着迷的"分形"的例子．因为创造分形通常需要使用一个过程无穷多次，因此只有在现代计算机图形学出现之后，才有可能进行有效地开发分形所必需的实验．

早在计算机出现很久之前，波兰数学家瓦尔瓦夫·西尔宾斯基(Wacław Sierpiński)就发明了分形的一个最早的例子．构造西尔宾斯基图形的第一步是从一个大的三角形中间去掉一个小三角形．第二步同第一步一样，在每一个余下的三角形中去掉中心的三角形．反复重复这个过程，就得到所谓的"西尔宾斯基毯"(图 18)．

西尔宾斯基毯的突出之处在于把它的大小加倍之后得出由三块原来图形组成的图形．这是非常奇怪的，因为我们用方块和立方体做实验时，加倍因子总是 2 的方幂：在加倍 1 维图形时，我们得到 2 个原来的图形；在加倍 2 维图形时，我们得到 4 个原来的图形．因此，西尔宾斯基毯的维数必定是在 1 与 2 之间的某处，从而是分数维的(特别是，维数 d 具有性质 $2^d=3$，这数 d 是

以 2 为底 3 的对数,即 1.5849…).

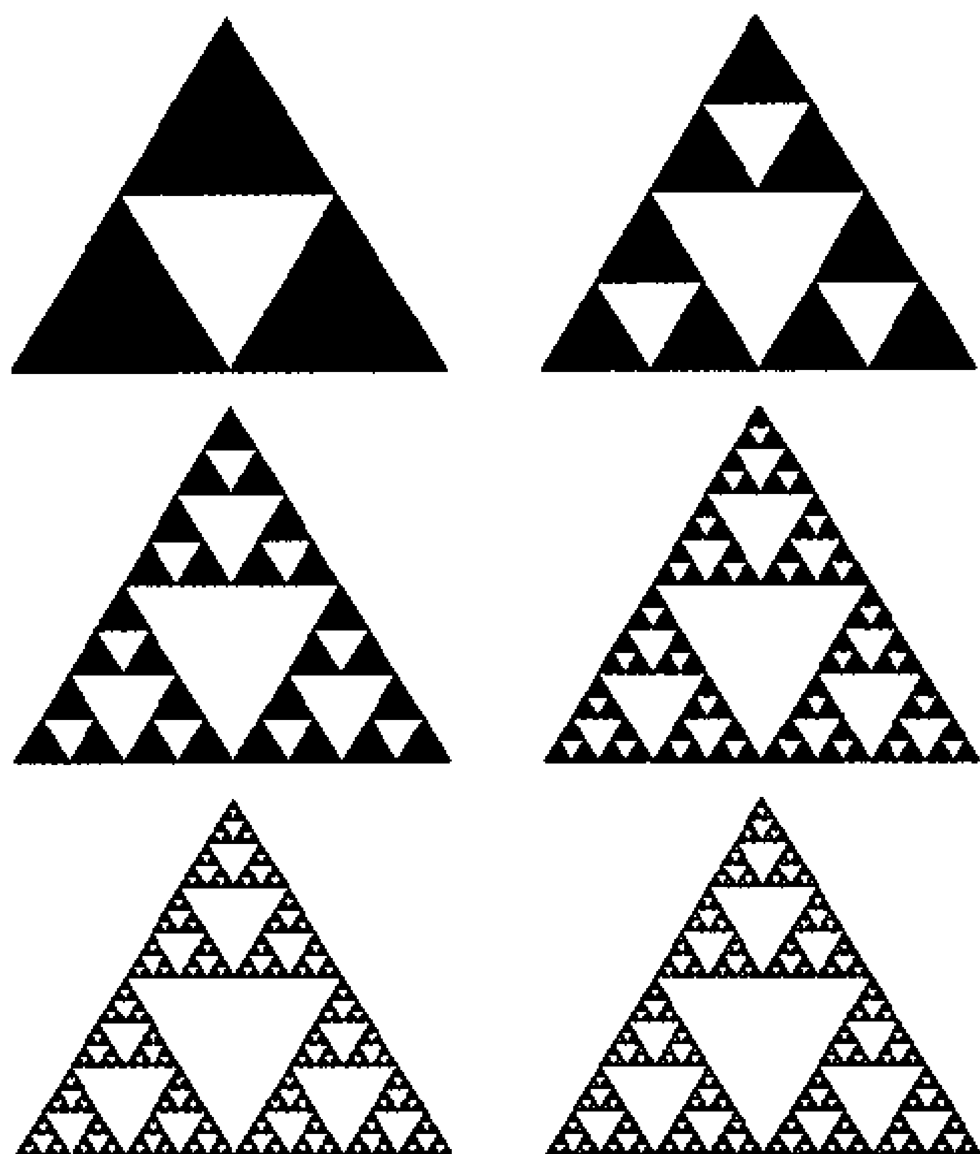


图 18 无穷次穿孔的三角形即所谓西尔宾斯基毯,它包含 3 个它一半大小的图形,而不是人的设想维数为 1 或 2 时的 2 个或 4 个,因此它具有在 1 与 2 之间的分数维数.

分形可用来启动大量数学的讨论,因为它是一个无穷过程的结果,它们可以通过几何级数或循环小数来讨论.分形的不同寻常的加倍性质给出以 2 为底的对数的解释.其他分形过程导 [25]
出像曼德尔布洛(Mandelbrot)集那样的图形,其中包括数学艺术

中一些最突出的例子.[5]

比率和平均值

我们能教给我们学生的最重要技艺之一是用几何方式来解释数据.面积和体积的几何学可以帮助学生们理解像变化率、累积值和平均值之类的概念.这里讲三个例子来说明这种观点:

● 司机先以每小时 40 英里的速度开车 1 小时,然后以每小时 46 英里的速度开车 2 小时,问她走了多远,她的平均速度是
[26] 多少?

● 设计师头一年每年挣 4 万美元,其后两年每年挣 4 万 6 千美元,问整个时期他一共收入多少? 他的平均工资多少?

● 一个鱼塘水的深度达 40 厘米,另外两个同样大小的鱼塘水的深度达 46 厘米,问鱼塘中水的平均深度为何?

所有这些问题都涉及相同的计算,全都能用同样的图(图 19)来表示.在每种情形下,全部累积值可以用几何方法解释成三个长方形的面积,而平均值就是具有相同的底边和相同总面积的长方形的高度,还可以用另外的方法画出累积值的图,即精

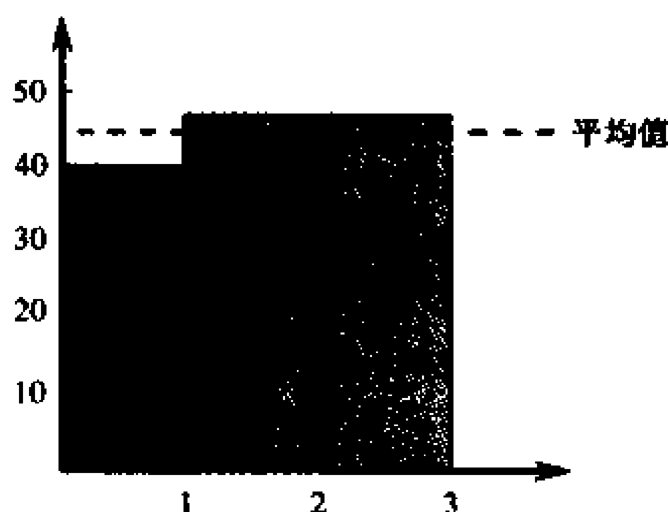


图 19 条线图使得三个类似问题的数据几何化,它形象地表明平均值对应具有相同底边和相同总面积的长方形的高度.

确表示在给定时间之内一共行进多少英里(或者已经挣了多少钱)(图 20).

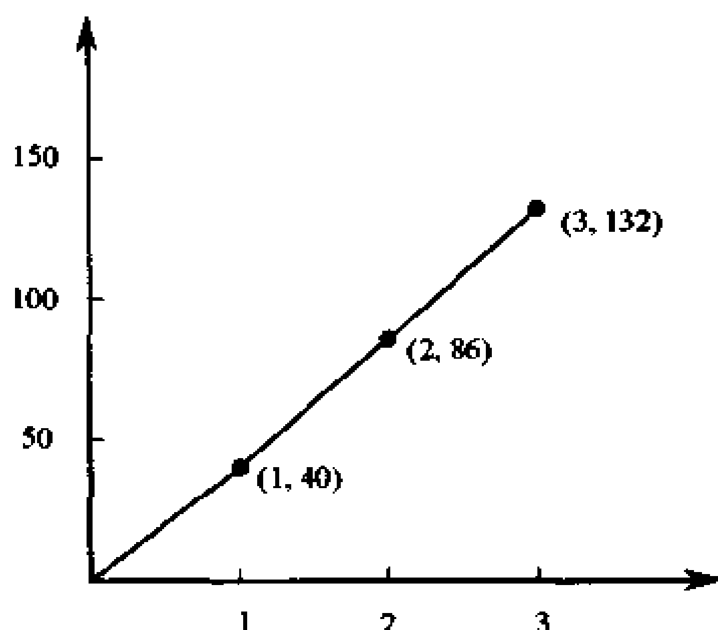


图 20 折线图展示出三个问题的累积值,表示已驶过的全部英里数或已挣的美元数,对应条线图和线性图之间的关系是微积分的前身. [27]

变化率的用条线图来表示(数学家称之为阶梯函数)可以导出用直线表示的累积值图(即多角形函数).由累积值求变化率的过程最终导出微分法,而由变化率求累积值最终导出积分法.虽然在学生发展他们对速度和距离或薪水和挣的钱的理解时不一定非得认识到这种联系,但每个学生无论是为学习微积分做准备还是为谋职做准备,都可以由这种类型的数学经验中受益.

画立方体

弗洛贝尔的幼稚园中的每个孩子都练习画画.在初级水平上他们画着玩,而在另一个水平上他们从画中学习.他们先学习观察球,圆柱和立方体,最后他们学着把他们所看到的东西画下

来.到了我们这个时代,已经不那么强调画画,从而失掉了机会让学生发展自己的能力使几何关系可视化.

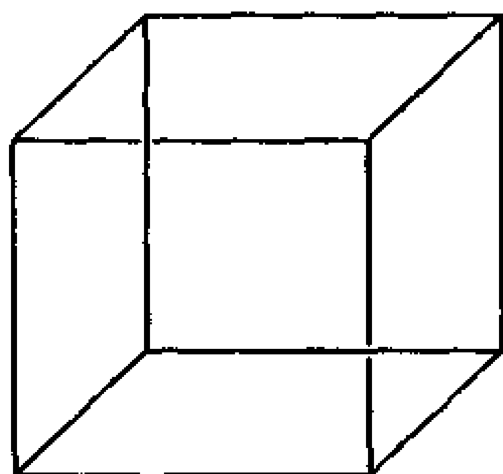


图 21　立方体的典型表示法,即把两个全等正方形用边联结起来.这种表示法脱离现实,因为没有立方体看起来这样.

在大多数书中表示一个立方体的方法是画出一个正方形,然后沿着一条斜轴(通常 45°倾斜)把它平移,最后把对应点连接起来(图 21).虽然这是一个透明立方体的结构完全合理的表象,但没有一个立方体看起来真正有这种形象.不论我们什么时候观看立方体,要使一个表面看来是正方形,我们必须直接面对这个表面看,而在这种情况下,背面的表面正好在我们看到表面

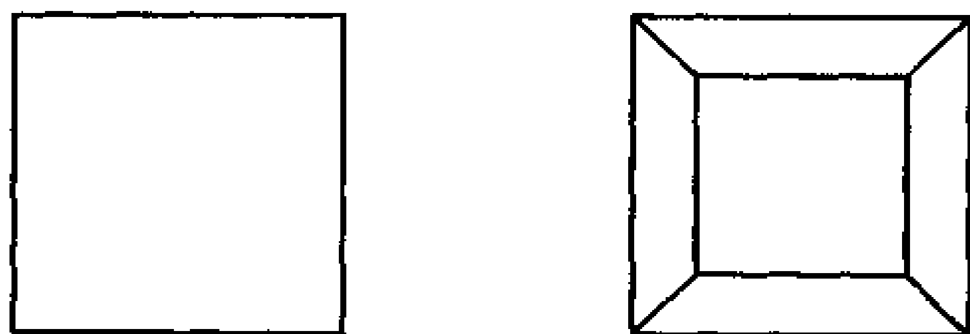


图 22　立方体有两个正确的表现,左方由"正交"投影(向下直视)得出,右方由前缩投影法得出.

的正后方，而不是像在传统画画中的歪在一边．不管我们用直上直下的“正交”投影，还是按前缩透视法（即背面看到比正面小）情况都是这样（图 22）．

另一种常用的画法是用“等距投影”，它把立方体的三条边用三条等长线段相交成120°来表示（图 23）．这个方法的缺点是 [28]
立方体有两个顶点用同一点来表示．

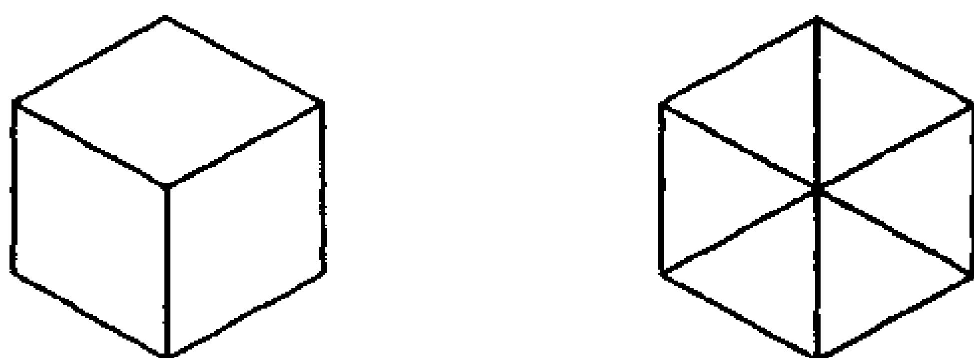


图 23　通过沿45°角看一个角可得立方体的对称“等距”外观，它们都是立体而透明的，对角在前面角的正后面，从而这种外观只能看到 7 个顶点．

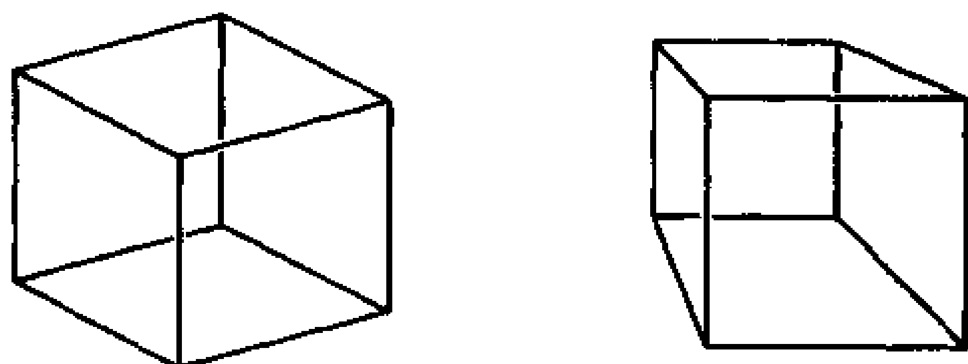


图 24　立方体的两种处于一般位置的外观，左方是平行透视，右方是单点透视．

如果我们希望得到立方体的更为一般的图象，我们必须把每个面画成一个不是正方形的平行四边形（用平行投影）或梯形（如果用单点透视）（图 24）．平行（或正交）投影特别容易画出，

[29] 因为一旦规定好一角的各边的位置,立方体的图象就完全决定.在正交投影之下,立方体的平行边在图象中也表现为平行边,因此,一旦我们知道任何角的三边的位置,我们就能很容易完成这个图(图 25).

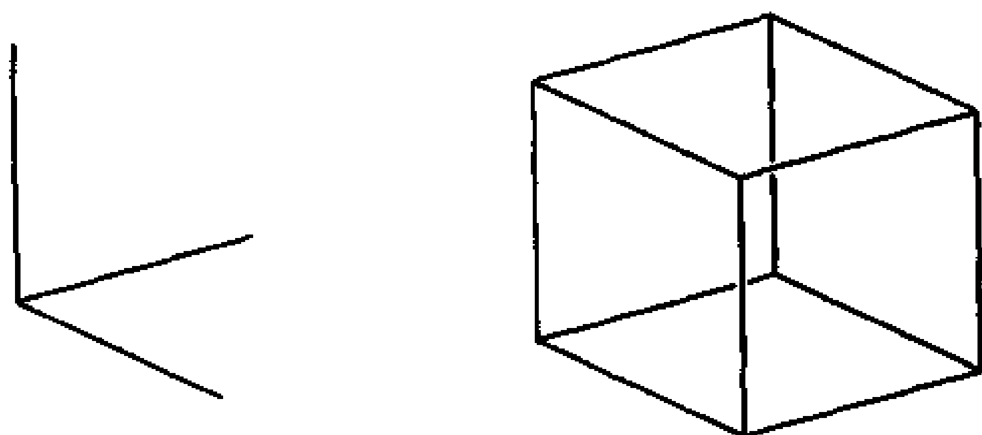


图 25 在正交投影的画图中,立方体的平行线画成纸面上的平行线,图中立方体的完整正交投影图由任何角的三条棱的方向决定.

一旦我们知道如何把 3 维物体表现在 2 维的纸或者计算机图形学的屏幕上,我们就能进一步做远为复杂的练习,例如画 4 维的立方体,即所谓*超立方体*或 *4 维立体*.许多学生在科幻小说或幻想文学作品中碰到过 4 维立方体的想法,例如罗伯特·海因莱因(Robert Heinlein)的故事《……他盖了一所弯曲的房子》[10]或马德莱因·朗格(Madeleine L' Engle)的《及时的高招》[14]或者埃德温·艾博特·艾博特(Edwin Abbott Abbott)的《平国》.[1]

通常我们可以通过沿着垂直于我们的空间的方向平移一个通常的立方体来造出一个超立方体.虽然我们不能真正实施这样一个移动,我们还是能画出一个图象来表示当这个图象投射在平面上看起来像什么(图 26).首先我们画出三条边所决定的立方体,然后沿着第四个方向平移该立方体的一个拷贝,再把对应点连接起来.

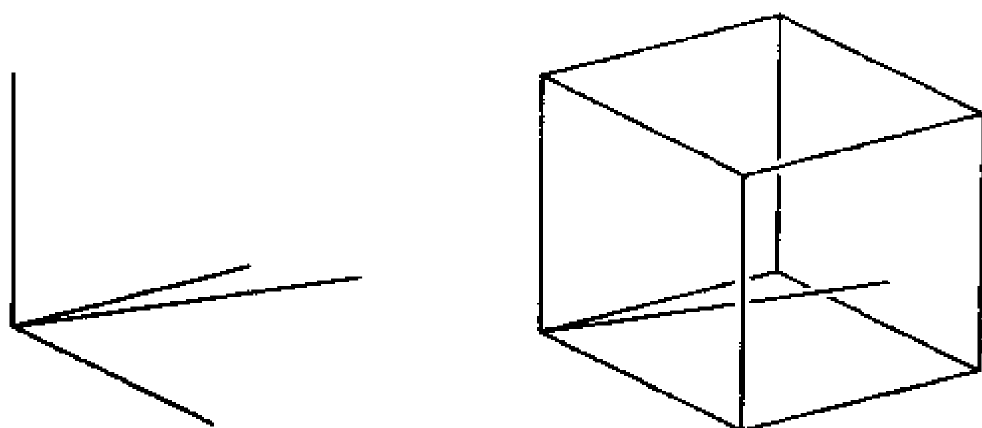


图 26 在传统的表示3维空间的三线角顶上加上第四个方向，就奠定了画4维物体的基础. 它表示出移动立方体成为4维超立方体的方向. [30]

同样的步骤使我们能够设计出4维立方体的3维模型——(正如上世纪由弗洛贝尔提出的)使用插上粘土球的杆或更现代的材料像用线编织在一起的吸管，或者某些标准的建筑单元. 只要我们规定好交于一点的四条边，我们就可以再一次确定平行投影的图象(图 27).

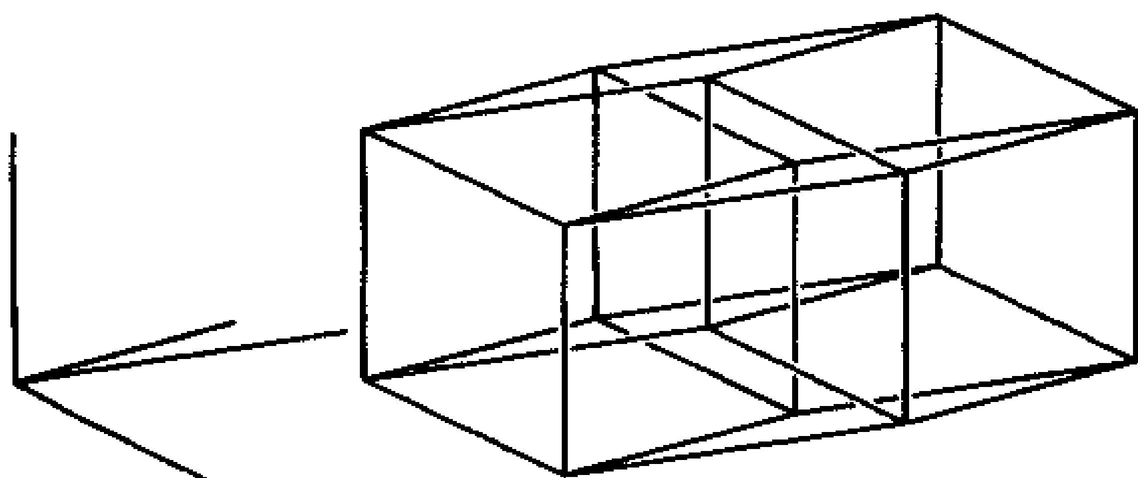


图 27 把立方体的两个拷贝的对应顶点连接起来形成完全的超立方体.

正像一个立方体的前缩投影图象是一个正方形内套一个正方形，并把对应角连接起来，超立方体的前缩投影图象看来就像

“立方体内套立方体”并把对应角连接起来(图 28).

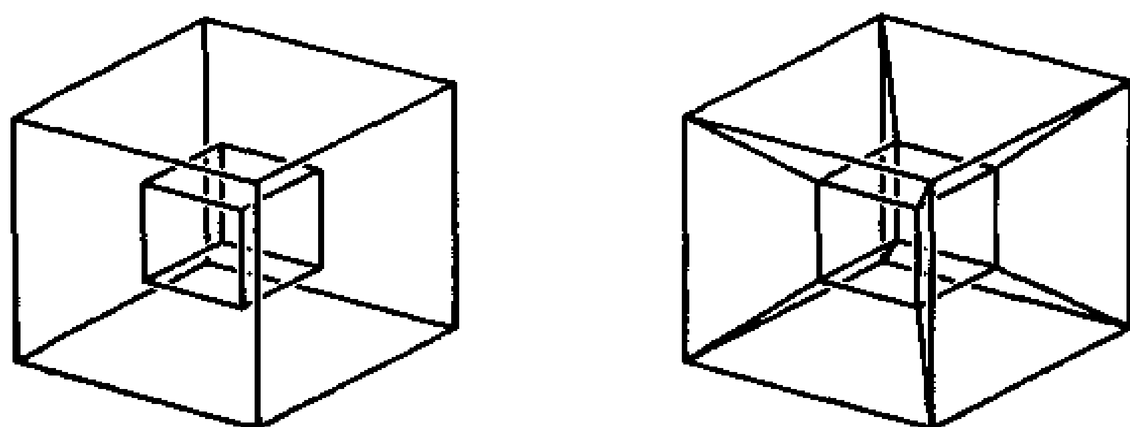


图 28　超立方体的前缩投影图象,可以想象为立方体内套立方体,并把对
[31] 应角连接起来.

一个立方体从不同的视角看是不同的,而球则不同,总是像一个圆盘,不管我们怎么看它都一样.如果我们在球上标记上赤道,则不同角度看,它的像是不同位置的椭圆(图 29).学生们也

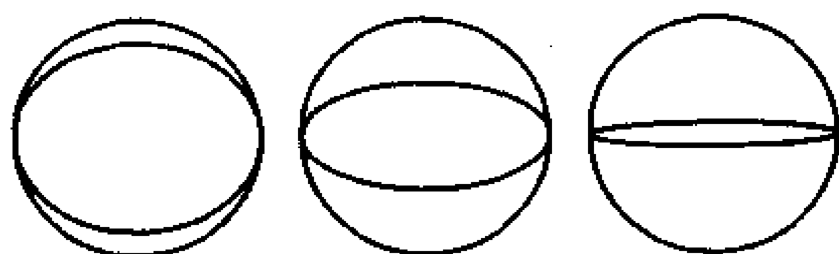


图 29　通过转动画上赤道的球面,不难看出圆的形象总是某种类型的椭圆.

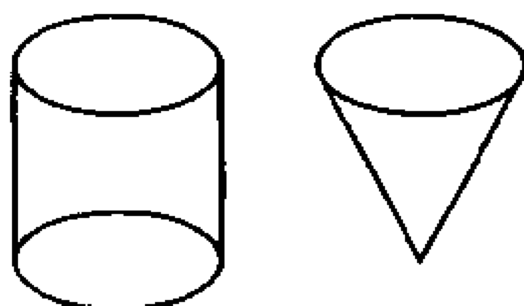


图 30　为画圆柱和圆锥,我们总是先画椭圆,它代表底面圆的适当的透视图象.

需要觉察到画这些基本图形的基本原理.事实上一个圆总是看起来像一个椭圆,它包括两个极端的情形:椭圆仍是圆或者退化成两重的直线段.认识到这个事实使我们能更易于画出更像的圆柱和圆锥(图30).

现代的计算机能够极快地画出一系列图象表示转动立方体或超立方体的不同外观,造成对3维物体的幻觉.当今的学生们对这个过程非常熟悉,因为他们是伴随计算机激发的特殊效果和电视商务一起长大的.我们可以利用这种经验教给学生对数学形式有新的认识.随着互动程序变得越来越普遍存在,各个年纪的学生都具有史无前例的机会来操纵和开发3维及高维中的几何形式.

不同维数的坐标

我们能够教给各种程度学生一种最重要的观点是利用坐标描述来确定位置和发出指令,在小孩成长的每一阶段都能提供坐标的例子.为了发展对不同坐标维数的理解,没有更好的方 [32]
法.你不必在进入第2维然后第3维(及更高维)之前,完全学会第1维.在任何时候都存在机会吸引你从维数的观点来考察坐标:我们只需要让学生觉察到他们正在看的东西.虽然总是存在不同维数的经验,对于我们当前的分析来讲,按照坐标的数目来区别开现象是很有用的.对于不同的现象,为了确定位置或者发出指令,需要不同数目的坐标.

数、直线和圆

小孩甚至在很小很小时都能理解地址的意义,每个人都懂得通过街道地址找到特殊地点所使用的通常算法:先到这条街道,然后找到某建筑物的号码.假如这建筑物正好是你要找的,那就行了,假如不是,那你就跑到附近的建筑物,看一下它的号码,假如这个号码接近于你要找的,那你就沿着这个方向继续找

下去;如果号码相差更远,那你就得回过头沿着反方向去找,一直到你找到你要找的门牌号码才停下来.

即使对这种简单算法的讨论也能说明许多重要事项.我们通过一个特殊的数来确认一个位置.我们沿着某一方向或另一方向在 1 维道路上移动,从一个位置到另一个位置.在理解这个基本步骤之后,我们可以加进一些更为细致的内容.例如,这个地址是在街道的单号一边还是双号一边,另一种更精细的内容是估计为了从一个地点到另一地点,我们必须走多少距离,而这点就引导出减法的几何解释以及绝对值的概念.

一开始我们可以在有正数地址的数直线上或者在真正街道上通过寻找号码进行实地操作,后来同样概念可以用于具有负值的标度.例如温度,把温度计的垂直放置就是强调其方向性."当温度从 65°变到 40°时会出现什么情形?""它下降了 25°."实际上远在引进带符号的数之前,我们已经有这种观察了.

许多城市的街道图都使用有方向性的地址(例如纽约市,既有东 42 街也有西 42 街).在这种情形下,从地址的知识找出建筑物的算法稍有不同,可是依然很容易能在小学水平来讨论.在同一边两个地址之间的距离还是照通常的方式决定,而不同边的两个地址的距离则是其地址之和.这句话用不着死记硬背!
[33] 带正负号的数也不一定很神秘.

同样的 1 维算法,对拨好钟表也适用.不管它是普通表还是数字表,它只依赖于它是否既可以前进,又可以倒退.拨好钟表和找一个街道住址稍有不同,即使这条街道弯弯曲曲,只要不能回到原地就行.但是在一个圆圈上确定一个特殊的地址和拨好钟表问题很类似,你可以沿任何方向走,最终都可达到你的目的,当然一个方向可能比另一方向容易得多.

在一个圆圈上确定一个地点的战略决策问题是一种多步问题的良好例子. 对这类问题学生应该学会去解决. 在这个例子中正如其他许多例子中一样, 并没有单一的解答——可以有多

种战略得到同一结果．人们面对这种局势首先必须决定有哪些选择，然后再决定每一种选择有什么优越性．不难理解极小化努力的目标，这比把用线或其他量来度量的成本极小化还容易．

在1维的例子中，确定任何点的位置只需要一个数．从一个位置移动到另一个位置的方向也是1维的："向右走三个住宅"，"逆时针走5圈"，"沿圆周走到对顶点的半路"，这最后一种指示依赖于圆的大小，可以作为理解角度测量的入门．

拨好钟表，不论是普通表还是数字表，都给"全景"提供一个极好例证，这个现象也可以在线性标度上看出．例如，在许多汽车收音机的波段开关中，许多模拟仪表活动的指针到极左方或极右方就停下来，而在数字式仪表中，指针只是从最高值降到最低值．搜寻一个特殊的无线电台，随着无线电波段开关种类的不同，于是面临两个不同的问题．

刻度的维数是一个重要的概念，它在数学中以及在科学中都一而再、再而三地出现．当学生对他们所用的这些种数越来越复杂时，他们就能在数直线和数圆中引进分数或者小数．在城区沿着道路确定电话线杆的位置，要求一种不同的地址，即用分数或实数表示真正的距离，这些数更加复杂，但是确定它的步骤还是一样的．

在1维世界中确定对象或地址的位置可以用两分算法（或者把每个区间分成十份的算法）．例如它与寻找电话号码的有用的信息技术有关．首先你试看把你的问题分成两部分——或者 [34]
打开电话号码本或者挑出一个数，然后把你猜的数用你所要的数做一次比较后，再猜一次它在哪一部分（是在你猜的数上面或者下面），然后继续下去直到你找到为止．

我们还可以用同样的方案来求出正方形对角线长度的"地址"，而不必求助于具有平方根键的计算器．求与一个分数相等的小数问题可以看成一种更复杂的1维地址问题．假如你要求

$\frac{3}{17}$，我们可以用 17 乘上不同的小数，看看是否乘积大于或者小于 3，所有小数都可以放人一个或者另一个范畴，它从来不正好等于$\frac{3}{17}$. 但另一方面，对$\frac{3}{16}$，正好有一个小数等于它，因此在十进直线上，这个问题正好有一个固定的位置是它的解.

长度和周长

1 维现象的基本几何问题就是沿着一条道路确定距离. 关键的例子包括计算或比较曲线和多面体的周长. 有一个几何数——π，每一个学生都应该学会理解.

尽管 π 有普遍意义，可是当你问 π 是什么时，大多数人都不知道如何回答，大多数普通人以数值估计来回答，3.1416 或$\frac{22}{7}$，也不知道在这两种情形下，这个近似值是太大还是太小. 数学家用几何性质来定义 π，通常讲起来像“一个圆的周长与直径之比”或“圆盘面积与边长等于半径的正方形面积之比”，当然，两个比值相等这个事实是数学中的一个主要问题. 从对 π 的估计不断的讨论，我们得出大量的里程，从幼儿园的孩子认识到一根带子围着一个罐子的长度是横跨顶盖的三倍多一点，一直到大学第二学期微积分课上学习弧长的积分.

求圆的圆周是一个 1 维问题，因此它的答案应该在数直线上有一个代表. 可是这代表点在哪里，我们如何判定给定一个数是比这个长度大还是小？在讨论这些问题时，同外接的或内接的多边形周长进行比较是一个有效的战略. 虽然这种比较并不能精密地定出 π 的值，但它的确可以令人信服地证明$\frac{22}{7}$比 π 是
[35] 稍大一点还是稍小一点.

某些计数游戏对于发展小孩的代数量的算术能力特别重要. 学生可以选取指令卡，比如说“前进两格”或“后退三格”（F2

或 B3)，然后他们可以实施这些指令.然后我们就要他们用这两张牌换一张也能完成同样效果的牌.在考虑二次或三次跳时，他们就获得用一个正数乘一个有符号的数的经验.游戏的花样很多.一手向上走三张 B4 牌等于向上走一张 B12 牌，向下走三张 B4 牌等于向上走一张 F12.我们可以引进符号：P3B4 = “向下走 3 张 B4 牌”，它等于 T3F4 = “向上走 3 张 F4 牌”，同样 PB5 = TF5，PF2 = TB2，这产生一个完全的交易代数.

有正负号的数的教学上的麻烦是我们既用它们确定位置又用它们进行运算.最先碰到的绊脚石就是“负乘负得正”这个规则，它使许多学生相信，数学意味着死记，而不是合理思维.玩计数游戏取得适当经验可以帮助学生恢复对于负数规则的直觉.用棋盘的游戏可以帮助学生认识到记分的价值，首先表现在简单的加法上(特别是当运动依赖于一对骰子的箭头指向)，后来表现在更复杂的游戏上，其中得分数可以是正或负，一般来说，得分经验是 1 维的.

平面和曲面

孩子们应该逐步熟练地遵循和指明方向，每个小孩都应该学习如何引导别人从学校的一处到另一处或者描述学校的周围环境.虽然在一个现实的市镇中，从一个街道住址到另一个住址的算法可能十分复杂，但理想的市镇可能有一个比较简单的结构.我们可以想象一串虚拟的市镇具有不同的维数性质——一个边境市镇全都沿着一条街向外伸展或者在一个长方形地区设计一个村庄.一个模式村庄可以激发许多讨论，孩子们设计他们自己的市镇的坐标方格可允许更多的变化.

不论街道如何命名，我们都可以在方格上指明方向，只须说“向右走两个街区，然后向左转走三个街区”.对于具有清楚方向感的人来讲，这个指示可以变成：“向东走两个街区，然后向北走三个街区”.头一个指示依赖于行人所面对的方向，第二个指示则不依赖.假如一个村庄的地图挂在墙上，我们可以用自然的坐 [36]

标方向:“向右两街区,向上三个街区”.某两个指示于是可结合在一起:“向左2,然后向上3”和“向左3,然后向下5”,结合在一起成为“向左5然后向下2”.用牌来玩这个游戏,可以很容易引进有序数对的加法运算,甚至于用正整数乘有序数对的运算.假如我们引进“拉下”和“提上”的运算,我们就能把有正负号的数的1维代数扩张成2维量的代数.

注意这个指令代数并不要求使用平面的坐标.假如地址用街道数或罗盘方向来表示,还具有附加的价值.其中之一就是避免由负数引起的麻烦.从E3N4走到E7N2就要求一步E4S2.这种常识的方法和代数命题(7,2)-(3,4)=(4,-2)之间的对应关系是非常重要的,它只有在学生的数学教育的较晚阶段才出现,有许多人让负数搞糊涂了,他们本不应这样.

“出租车几何”对于方向的指令提供一个有效的变化,学生扮演调度人员的角色,他告诉司机如何从一个地点到另一个.“只要向北过三条街然后向西过两条道”就是这样一个方向.指令的有效性以及出租车公司的利润依赖于许多因素,例如单行线、交通事故和车辆堵塞等.我们很容易想象以现实城市交通状况为模型的棋盘游戏,使得学生习惯两坐标指令集的思想.

地球表面是另一个2维对象的熟知例子.虽说它存在于3维空间中,为了确定任何地点,我们只需要两个数——经度和纬度.船的调度人员可以给出指示向正东航行10英里然后再向正北5英里.在地球表面上(而不是在平坦平面上),这些操作顺序可能造成一个差别:先向正北航行5英里,然后向正东行10英里后船到达一个不同的位置!这个差的大小是曲率的一种固有的指示物.

在教几何学时,我们不应忘记互动计算机游戏.今天的学生自然认为,可以通过推下按钮、旋转表盘或者旋转操纵杆来处理2维屏幕上的图象,像LOGO这样的程序给学生提供经验,能给出简单的几何指令在屏幕上移动点和对象,这就给数学教师一



个机会来引进任何数量的重要概念,包括作出正多边形或星形多边形的重复操作或画出分形或填满空间的曲线的递归过程. [37]

许多计算机游戏使用全景屏幕,它在不同的 2 维几何中引进有趣的想法.往往我们引导一点从计算机屏幕左边出去时,它又出现在右边的相同高度的位置上.这个与无线电十进的刻度盘的现象类似,它可以看成在一个圆周上操作.一个线段把两个端点看成同一后可以当一个圆周来看待.类似,如果我们把计算机屏幕的左边的各点同对应右边的点想成是同一点,那么我们处理的就不是一个平的长方形,而是一个圆柱面.

但是还可以出现更多情形.常常出现这种情况,一个点从屏幕顶部出去,又在底部对应位置重新出现,我们把顶部和底部看成同一,就得到一个圆柱面.这样我们得到一个图形像一个内管,数学家称为环面.从某些方面来看,环面的几何很像平面的

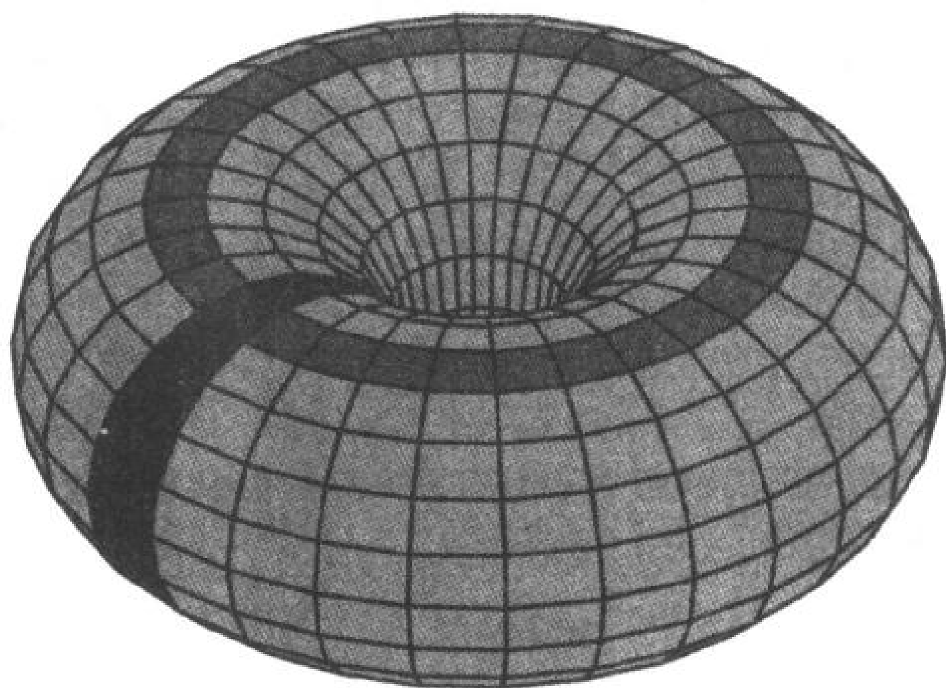


图 31 环面是炸圈表面的数学名称,它是一个 2 维曲面,其中两条封闭曲线可能只相交于一点,并且有可能一条封闭曲线并不把其内部与外部相分离.

几何，但是在其他方面它却十分不同.在平面上，任何不与自身相交的多边形把平面分成两块.但是如果把封闭多边形放在环面上围绕它的顶部，则它不把环面分成两块：它的内部与外部完全一样.与这个现象有关的是这样一个事实：在环面上我们可以找到两条封闭曲线只相交于一点上(图 31)，而平面上两条封闭
[38] 如相交(不只是相切)，则相交于偶数个点.环面在许多方面是一个不同寻常的对象，对记录一对圆上的数十分理想.

3 维 空 间

从 2 维到 3 维只有一小步，我们可以从 2 维乡村设计图过渡到一个城市模型，其中每个地点以及格子上每个位置都有一个高度.我们能在出租车几何上增加电梯几何，我们用 3 个数指定一个位置.例如 E3N4U9，指在 E3N4 的地点上，一个楼的第 9 层，然后我们可以决定一个算法从这个地点到达 E7N2U5.注意在这种特殊的几何中，我们在哪个方向上移动有很大不同，通常的算法是 D9E4S2U5.开始用 D4，你倒是到了正确的楼层，可是楼却不对！这种情形与在儿童攀缘游戏立体构架上玩的游戏不同，它的指令就是通过向左向右、向前向后、向上向下移动一定的距离就可以从一个位置移到另一位置.在这种情形下，我们可以按任何次序来执行指令.

假如我们想在给定一架飞机经度、纬度和高度的条件下来确定它的位置，我们就得到另一种 3 维几何学，我们指示给定位置的 3 个数的顺序或者从一点到另一点的 3 个方向的顺序，都再一次使得得出的结果有所不同.

高 维 空 间

学生们在讨论平面的坐标对和 3 维空间的坐标 3 数组所积累的直觉经验自然导向高维的坐标几何.对于 2 维和 3 维的完全理解提供了一个重要的基础，使得在科学和工程，在经济学和

社会科学中，特别是在计算机科学和图形学中，对于向量和矩阵代数进行有力的推广．下面我们用两个例子来说明这个过程．

一个正方形的顶点可用 4 点(0,0)，(1,0)，(1,1)和(0,1)表示．为了得到一个立方体的顶点，我们可以取一个正方形的顶点，使其第三个坐标为 0，然后把这个正方形沿第三个方向移动一个单位，得出另外 4 个顶点，它们的最后的坐标都是 1：

(0,0,0)，(1,0,0)，(1,1,0)，(0,1,0)，
(0,0,1)，(1,0,1)，(1,1,1)，(0,1,1)． [39]

这样我们就可以把正方形或立方体描写为其顶点的坐标不是 0 就是 1．

这个过程自动地推广：为了得出超立方体的顶点，我们先从一个立方体的 8 个顶点把它最后一个坐标设置为 0，然后"把立方体沿着第 4 个方向移动"，得出另外 8 个点，其最后坐标均为 1：

(0,0,0,0)，(1,0,0,0)，(1,1,0,0)，(0,1,0,0)，
(0,0,1,0)，(1,0,1,0)，(1,1,1,0)，(0,1,1,0)，
(0,0,0,1)，(1,0,0,1)，(1,1,0,1)，(0,1,0,1)，
(0,0,1,1)，(1,0,1,1)，(1,1,1,1)，(0,1,1,1)．

这样我们就得到一个超立方体的 16 个顶点，其 4 个坐标的每一个都是 0 或 1．正是这种表示在同计算机通讯时是最为理想的．

能够进行极好地推广的第二个题目是毕达哥拉斯定理．如果我们把这个定理看成计算具有已知边的长方形的对角线长度的方法，那我们马上就可以推广到 3 维：给定一个立方体以长方形为边界，首先把这个定理应用在一个边界面上，然后再把它应用在由第一条对角线上立起的长方形上(图 32)．我们不难看出，$e^2 = c^2 + d^2 = c^2 + (a^2 + b^2)$．因此以 a, b, c 为边的长方形棱柱的对角线的长度是$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$．建立这种模式之后，几乎可以马上得出 4 维空间的距离公式，于是学生能计算具有 0,1 坐标的超立方体的对角线长度．结果 4 维立方体的主对角线 [40]

——例如从(0,0,0,0)到(1,1,1,1)——的长度为$\sqrt{4}=2$,正好等于边长的两倍.

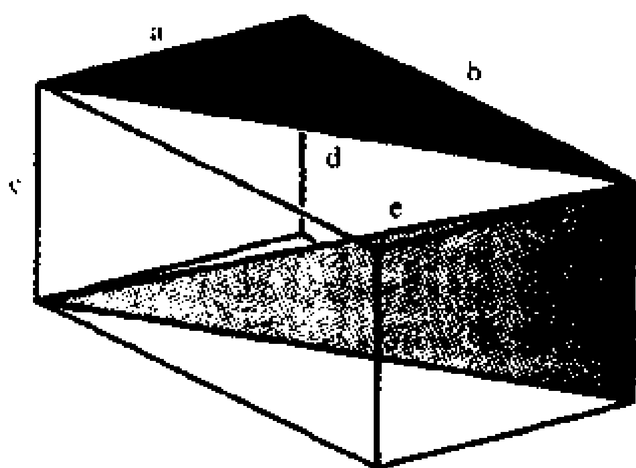


图32 通过把它应用到长方盒子中两个长方形上,把毕达哥拉斯定理推广到3维.

位形空间

在通常1维、2维和3维空间中,用坐标描写在确定位置和方向上非常有用,对于需要超过3个数来确定的现象,坐标的描写也同样行得通.探查性的数据分析是一种讨论数据表示的统计技术,是维数在当前研究中最重要的应用之一.使多维数据集合可视化并加以解释的能力是我们在这个现代时期能够赠给我们的学生一种最好的礼物.

高维现象中一些最有用和有趣的例子发生在位形空间中,它是一种表示自然界运动的某种结构的几何对象的集合.我们最熟知的空间是直线上的1维点集,平面上的2维点集和空间中的3维点集,但是我们也能考虑平面上直线的集合和空间中平面的集合,平面上所有可能的圆的集合或者空间中球的集合.我们可以用几个导致高维位形空间的现象的例子来说明这个过程.

考虑下面(这种稍微不太现实的)情形:我们当地剧院负责

灯光的主管，必须安排一组光线照在舞台上，使得在某个时间照在某一块地板上.在表演过程中有时还要使光点的大小有变化，有时又要求一个彩色照明圈包含在另一个彩色照明圈之中.她怎么能描记所有这些照明圈并且进而设计光的方向使得助手能加以实现?

在这个特殊的剧院中，光线全都具有相同的形式.通过电线把一个灯泡从天花板上悬挂着，圆锥形的灯罩使得光线照在地板上形成一个照明圈.假如灯罩的边向下成45°角，那么照明圈的半径就等于灯泡距地面的高度(图 33).这就使得灯光主管很容易确定任何灯光的位置，因为她只需用戏剧导演给她指令的同样的坐标就可以指出光圈中心的位置.这用两个坐标，但灯光主管还需要另一个数来表示照明圈的半径.她也可以用另一种方法，即确定灯泡离地面的高度，因为在这种理想化的情况下，这两个数相等.所以任何一个光圈能够用 3 个坐标来表示，前两 [41]
个坐标表示中心的位置，第三个坐标表示照明圈的半径(或者在我们这种特殊情形下的高度).

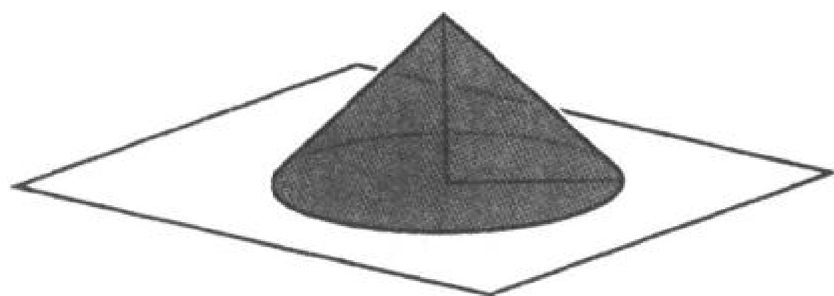


图 33　一个光点具有45°角的灯罩将照亮舞台地板的一个照明圈，其半径等于灯光离舞台的高度.

这样，我们看出平面上圆圈的集合是 3 维的，这个集合是位形空间的例子，每个圆圈表示光圈的位形空间中的一个元素.这样，我们可以利用其 3 维性作为一种记录方式，只需要用三个坐标就能记录每个照明圈的位置，例如(6,8,5)表示中心在地板上

(6,8)位置的，半径(或高度)为 5 的照明圈.

把这个集合称为空间表示它的意义超出仅仅是为了记录方便.它还表示，坐标的算术反映出光线的几何学.例如，坐标为(6,8,5)的照明圈照在舞台上，而光(6,4,5)则照到前台.不难定出一个规则来表示，什么时候光线离开舞台的前沿，即第二个坐标大于第三个坐标.

灯光主管所面对的更复杂的问题也能通过坐标来解决.例如，什么时候一个照明圈完全同另一个照明圈分开？用普通话来讲，这种情况出现在由前面两个坐标给出的平面上两点的距离大于第三个坐标之和时，用符号表示，这个条件可表示为 $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}>r+r'$.

在这个位形空间中，三个坐标并不起同样的作用，因此，虽然位形空间的几何是 3 维的，但它对待最后的坐标与前两个坐标有所不同.它不等同于通常 3 维空间的几何学，其中，毕氏定理对待三个坐标一视同仁.位形空间的一个重要方面是它们具

[42] 有特殊的对称性.

第 4 维

每个人或早或晚都会听说过，时间是第 4 维.不过，这种思想限制维数性的概念.早在上个世纪，作家们已经认识到，在许多情况下，时间可以看成某种第 4 维，但并没有要求这第 4 维起什么特殊作用.当物理学家，特别是相对论物理学家，通过给出三个空间坐标和一个时间坐标来确定一个事件时，他们就使用 4 维位形空间.这个空间有其自己的几何学，与 4 维欧几里得空间几何学不同.在欧氏空间中，距离由广义毕氏定理给出，而在相对论中，两个事件之间的距离由表达式

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-(t-t')^2}$$

给出，其中时间是通过与光速有关的单位来测量.

照明圈的 3 维位形空间为给分子建模的 4 维空间提供了一个有用的类比.组成分子的原子可以用不同半径的小球来表示.描述一个特殊的分子就好比描记舞台灯光一样,可用一张在不同位置的不同大小的球的表.每个球需要三个坐标来确定它的球心,还有一个坐标确定它的半径.这样,原子的位形空间是 4 维的,而一个分子就是排列成特殊方式的这种原子的集合.

利用位形空间的语言,我们可以向一台计算机描述一个分子,并要求它展示不同的外观.如果我们要计算机验证两个原子不相交,这就涉及四个坐标的代数条件,即

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-(r+r')^2>0.$$

这个位形空间的几何学更接近于相对论的几何学,而与通常的 4 维欧氏几何学不同.有趣的是,正是这类问题(避免相交)出现在机器人科学中,其中用大量坐标来描记在高维的位形空间中运动的物体.

如果在我们的舞台上每个光束都有变阻器控制照明圈的电流,从而控制它的亮度.如果在照明圈的坐标中再加上亮度,那么位形空间就成 4 维的.假如我们想同样再记录每个照明圈的 [43]
颜色,那么维数再次升高.规定颜色要求再加三个坐标表示红、黄、蓝三色(对于颜料)或者红、绿、蓝三色(对于光线)的色度、饱和度和色值或相对数量.灯光主管现在对每个照明圈有了七个坐标:两个表示地板位置,一个表示半径,一个表示亮度,三个表示颜色.由此可以看出,甚至一个简单的例子能够导出高维的位形空间.

相对论物理开始于考虑 4 维集合,三个空间维数和一个时间维数.更现代的物理学变得越来越复杂.当前有的模型记录七个类似空间的维数和四个类似时间的维数,得出 11 维的位形空间.另外一个重要的模型用 26 维的位形空间.在每一种情况下,模型的选择在某种程度上依赖于应用于该维数的某种数学,用它有助于描记高维空间的事件之间复杂的相互关系.

静力学和动力学

还有另外一种类型的位形空间，可以从一个小故事开始．为了举办学校雕塑展览，两个学生想用塑料绳图案装饰大厅的后墙，他们决定把塑料绳从墙的左边拉到地板上．在展览前的那一周，通过试错法，他们用了 20 多条绳子得出一个满意的设计．在展览之前，他们不能让绳子悬在那里，因此他们必须找出记录位置的方法，使得他们以后还能再挂起来．他们需要多少数才能确定每条绳的位置？绳子的集合的维数是多少？

不难看出，这个位形空间的维数是 2；只需要两个标记就能确定某一条绳的位置，一个标记沿着地面，另一个标记在墙的左边上．例如，数对(4,3)就表示一条连接地板 4 英尺的点到墙边 3 英尺高的点的绳子(图 34)，每个数对对应一条绳子，数对的集合就告诉我们所有绳子的位置．甚至我们还可能按照一种特殊的序列来记录这些数对，使得学生在重新装上这些绳子时知道他们遵从的顺序．

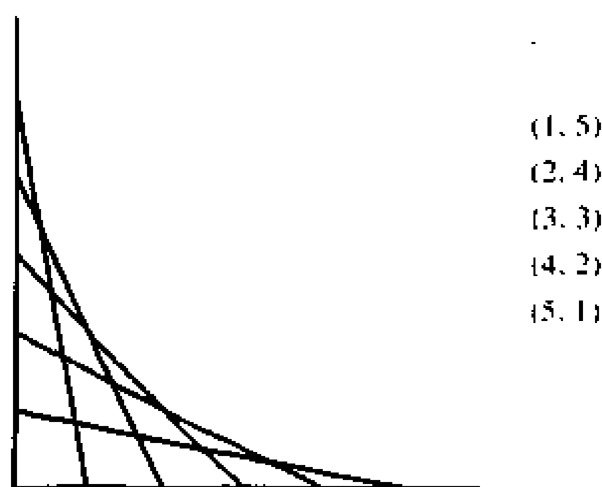


图 34　2维的位形空间能表示连结地面到墙左边点的绳子的位置．

从某种意义上来讲，这种编码有点像古老的“连点”游戏，其
[44] 中一个多边形由有序对的某一序列决定，从而要画出多边形来

就要把点连接起来.在我们的雕塑故事中,基本的元素不是点而是线段:通过形成绳子的序列,我们再创造墙上的雕塑.

如果我们增加位形空间的维数,我们可以允许绳子的底端放在地板的任何地方,而绳子顶端仍在墙的左边的某处.我们仍然需要一个数表示高度,但是记录中要求有两个数表示地板的坐标.这样,绳子的集合成为3维的,就有更大的可能性出现更有趣的雕塑.

如果允许绳子从垂直墙面任何地方开始连到地板上任何地方,我们就会实现一个4维系统.例如,通过简单的代数就能预言是否两条绳子会相交.如果我们的绳子都在墙面上,它们通常都会相交.如果我们是处于3维的集合中,这种相交的情形就要少见了,而对于空间中线段的4维系统,相交就更加罕见.寻求对应于通常空间的位相线段的位形也很有趣,在2维位形空间中哪些线段对应于连接两点的直线? 3维集合中的哪些线段又对应于3维空间的坐标平面? 像这类问题在绳子雕塑中能够产生惊人的不可预见的视觉效果.

当我们考虑动力学问题时,位形空间的维数更显得特别重要.一点在一条直线上运动时,我们可以用两个数描写它在任何给定时间的状态:一个数描写位置,另一个数描写速度.因此状态空间是2维的.一个点按照已知物理定律运动,例如一球在弹簧上下快速摆动,可以用该状态空间的一条曲线来描写.同样, [45]
一个点在圆周上运动,例如振摆,具有2维状态空间,它给出其角位置和角速度.

在平面上运动的点的状态空间是4维的,其中两个表示位置,另外两个表示速度.科学家分析卫星的运动必须用6维空间,其中有3个位置坐标和3个速度坐标.物理定律将把一个系统的真正状态限制在更低维的空间中.实际上,科学家要付出很大努力去分析这些空间的形状.例如,两个摆的运动对应于4维空间中环面上的一条曲线.研究这种高维动力系统在现代应用

数学中是极为重要的课题.

不同维数的切片

当弗洛贝尔拿出他的几何礼物时,他并不打算让它们显得是静止的.他最先拿出的礼物中,有一个是展示三种基本的形
[46] 体,它们可以通过各种方式用绳子悬吊起来(图 35).当这些东西转动起来,孩子们就可以从不同的角度来观察它们,最后能够对于它们的对称性和结构有所认识.

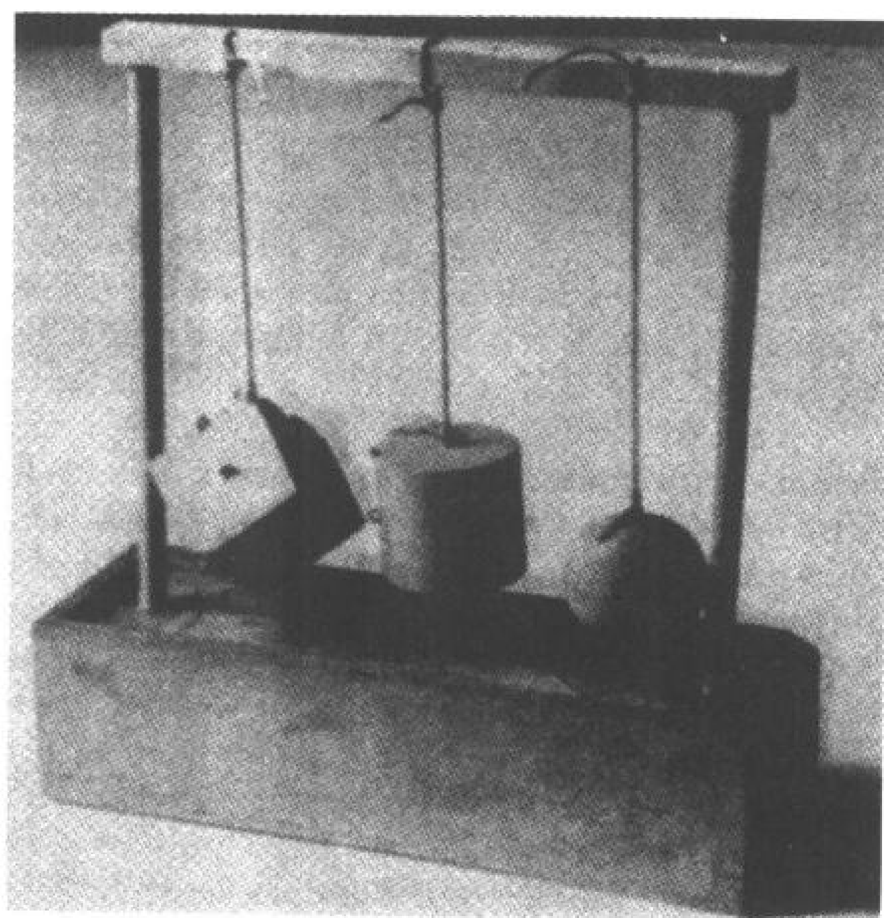


图 35 弗洛贝尔的幼稚园中包括一些基本的形体,它们通过不同位置的圆孔眼悬吊起来,然而从不同角度看到各种不同的截面形状.

弗洛贝尔所设计的模型中,球、圆柱以及立方体全都附有圆

孔眼,使得它们能用不同方式挂起来.由于球的对称性,只有一个圆孔眼,圆柱有3个圆孔眼:一个在圆底盘中心,一个在侧面正中,一个在外缘.立方体也有3个:一个在面的中心,一个在棱的中心,一个在顶点上.

这些转动物体的各种外观引导出理解空间形体的最有趣的练习,即确定截面切片.不去真正用小刀切开真实模型而能使切片可视化,是去想象当我们逐步把这块形体浸入水中时,会出现什么情况,水平面的形状将如何变化?

对学生最困难的练习是想象悬在一个顶点上的立方体的"赤道"的形状.学生要是能够仔细地观察一个真正的立方体就会能更好地想象出答案是六边形(图36).这个事实也可以通过

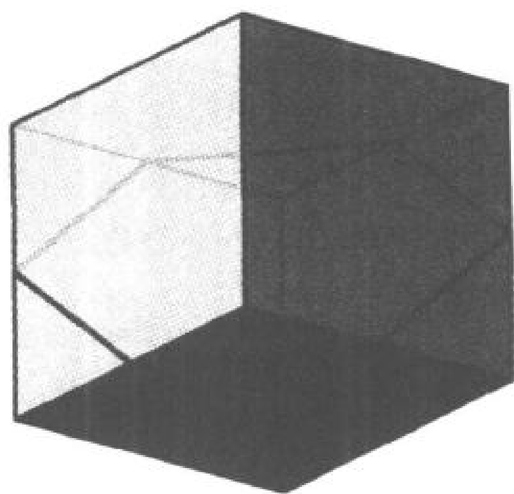


图36　一个立方体的中心对角截面结果是一个正六边形,其六个边正好把立方体六个面各砍去一个三角形.

把橡皮带绕在立方体上而很好地证明.我们可以造出这个立方体分解的展开片模型:把三个正方形的三个角切掉,然后再把它们放在一个正六边形的周边(图37).

用一个透明的塑料立方体,盛上一半有色的液体,可以显示出通过中心的各种切片.如果立方体精确饱满,则不论立方体的方向如何,液面的形状总是中心切片(即通过立方体中心的切

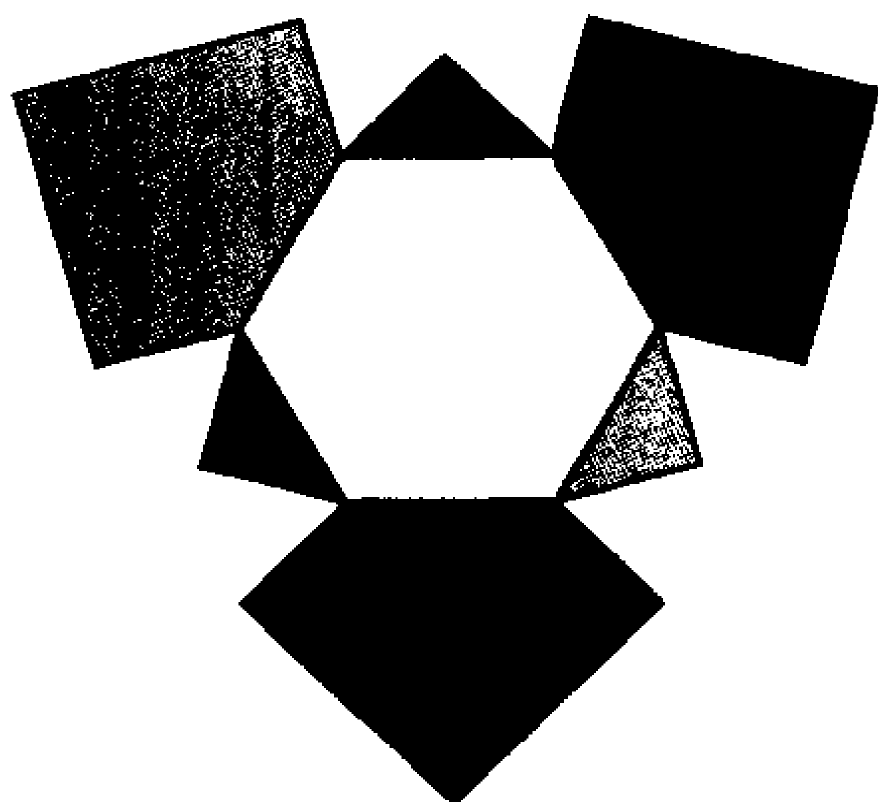


图 37　把这个纸板折叠成一个立体图形就可以得到由中心对角线切出的一半立方体，两个这样的立体，把六边形的面放在一起，就可以再装成一个立方体.

片）.一个很好的难题是要学生想出立方体处于什么位置产生出的中心切片具有最大的面积(它并不是六边形切片!)

早在上个世纪，米尔顿·布莱德雷(Milton Bradley)已经在美[47] 国制造弗洛贝尔的幼稚园教具了.他还添加一组另外一种形体——圆锥.通过它早在学生学习解析几何学很久之前，就可以看到和认识圆锥截线这种现象了.同样，一个透明的圆锥体，部分充满了液体，可以显示出当它转动时变化的圆锥截线.

研究多面体的切面引出一个有趣的难题，如果我们用一平面平行于三角棱锥的一个面来切割棱锥，我们就得到一系列三角形.如果平面平行于一个棱，我们就得出长方形.如果在中心位置就得出正方形(图 38).学生可以通过切割和折叠适当的模

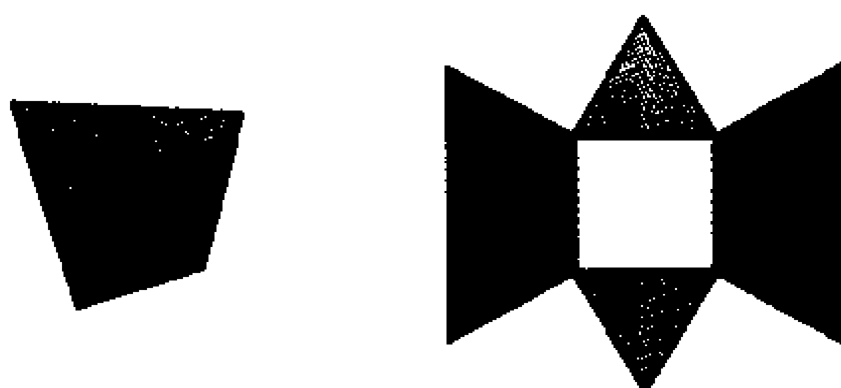


图 38 正如六面立方体的中心切片产生一个正六边的多边形，四边的四面体的中心切片，产生一个正四边的多边形即正方形，图右方的模板提供一个方法，造出四面体的一半，两块半四面体产生出一个出色的几何难题. [48]

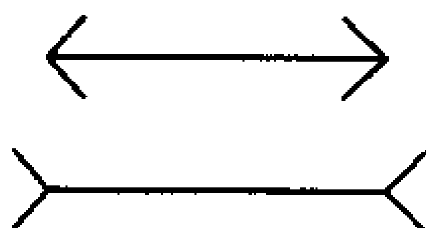


图 39 外观可能引起错觉，箭头的方向改变线段外观的长度而不改变它真正的长度.

型，做出这个分解的两块的纸板模型.许多人会发现把这全等的两块拼在一起成为三角棱锥非常困难，这种困难好像是 3 维错觉，就像两根等长的线段如果在两端加上箭头看起来就不一样长(图 39).

来自高维的拜访者

100 多年前，埃德温·艾博特·艾博特(Edwin Abbott Abbott)在他的经典小说《平国》[1] 中用切片来说明维数的类比.它是一个巨大的练习，试图采用在 2 维世界中生活的正方形的观点，特别是当他受到来自高维球的拜访.球力图教会正方形，但遭到失

败，使我们对于几何学中交流和可视化的挑战产生惊人的见解.(《平国》的开头部分可能使一些学生感到困难，一些社会讽刺的篇章在头一次阅读时可以跳过去.艾博特是位积极的教育改革者和争取男女教育平等的教育工作者，他讽刺维多利亚的英国对于阶级社会，特别对于妇女的心胸狭窄的态度.只有到书的末尾，正方形才开始对他的社会有更为开明的观点.)

假如比我们自己的球高 1 维的球来拜访我们，会出现什么情况呢？我们见到的不再是平面上长大和不断变化的圆圈，而会看到空间中长大和不断变化的球.我们倾向于把这个事件解释成气球的涨大和收缩，但是练习的要点在于用进入我们 3 维宇宙的超球切片也能同样解释得通.

如果从 3 维来的立方体拜访正方形，正方形会看到各种各
[49] 样的多边形.随着立方体通过不同水平时的位置不同而不同，那么 4 维超立方体的类似的 3 维切片会是什么样呢？这正是计算机图形学能够大显神威的一个地方(就像影片《超立方体：射影和切片》中那样).[3]

切片技术在现代许多科学应用中非常重要，特别是计算机图形学发展之后，X 射线断层术就是用计算机图形学从平面的截面来重新构造 3 维对象.地貌学家和地理学家绘制和分析等高线地图来表示地球表面上下不同构形的立视图.生物学家也用同样的切片方法，而材料科学的研究人员也用计算机图形学来表示在给定温度或密度下那部分 3 维曲面.数据分析利用射影和切片技术来研究从社会科学以及从物理和生物科学得出的高维数据集合.

学微积分的学生会认识到切片技术的威力——例如，研究旋转面的体积与其圆形截面的面积之间的关系，或者求 3 维空间图象面的轮廓线.早在学生学习临界点理论之前，他们就已经能理解和认识联系不同维数的切片现象.如果我们从不同方向切炸面圈或者硬面包圈会出现什么结果？我们不难进行真正的

实验,看出在有的位置,切片出现一对圆圈.不太明显的是切片由两个互相套起的圆圈构成.看到这些的好办法仍然是用透明内管装满一半带颜色的水来进行实验.几何学可以成为一门令人惊异的观察科学.

组 合 计 数

在研究几何图形时,会出现许多组合和代数问题,在不同教育水平一直到研究的前沿都能引进这类问题.三棱锥有多少条棱? 我们可以按照弗洛贝尔的建议,用牙签和豌豆造出一个模型,然后数它的棱.或者我们只简单地画出棱锥的图(图 40),并数一下它的六条边.

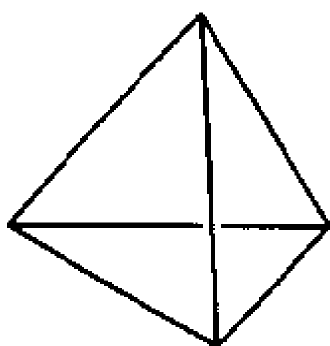


图 40　正四面体——最简单的正多面体——具有 4 个三角形的面,6 条棱和 4 个顶点.

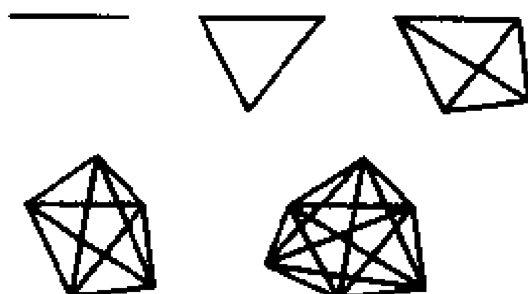


图 41　通过添加一个新顶点以及它和原有的每一顶点用线段连接,我们可以在 1,2,3,4,5,6,……个顶点上作出一系列完全图.

画出这样一个图的步骤就提示一个算法来确定其棱数.从一点出发,选择另外一点,画一条棱,把它同原来那点连在一起.现在选择一点,把它同原先两个点连起来,又得到2条棱,一共
[50] 有3条棱.(我们必须注意不要把新点选在原先棱所在的直线上.)接着我们再选一个新点,不在这已经作出的三条棱任何一条所在的直线上,然后把这个新点同原来3点连起来,这样产生3条新棱,一共6条棱.

我们可以重复这个过程来画5个点所决定的图形,这类图形称为完全图(图41).首先选取一点不在包含以前画的6条棱的直线上,然后把这点同原先的4个点连接起来,得到4条新棱,从而棱的总数为10.如果愿意的话,用同样的方法可以画出6个点或更多点的完全图.

从这个步骤中出现什么样的模式呢?我们把结果列成表,它就变得明显了:

点数	1	2	3	4	5	6
棱数	0	1	3	6	10	15

每一种情形,棱数等于点对数,这直接导向组合的研究.根据作图的顺序,不难看出,在第 n 阶段,棱数等于小于 n 的所有正整数之和.例如,6个点构成的图的棱数为 $1+2+3+4+5=15$.有的学生可能知道,前 n 个整数的和为 $n(n+1)/2$,它可能与小高斯的著名故事有关:他用这个公式把从1到100所有的数加在一起.这个表所揭示的另外一种模式是,在任何阶段的棱数是
[51] 原有棱数和顶点数的和.

三角形计数

在空间知觉测试中,常常要求学生从复杂的图形中抽取出一个简单的图形,数棱数就是这种问题中最容易的一种.稍难的问题就是计算不同三角形的数目(图42),通过把每个三角形涂上标记,我们就能把我们的表扩大,使它包含新的信息:

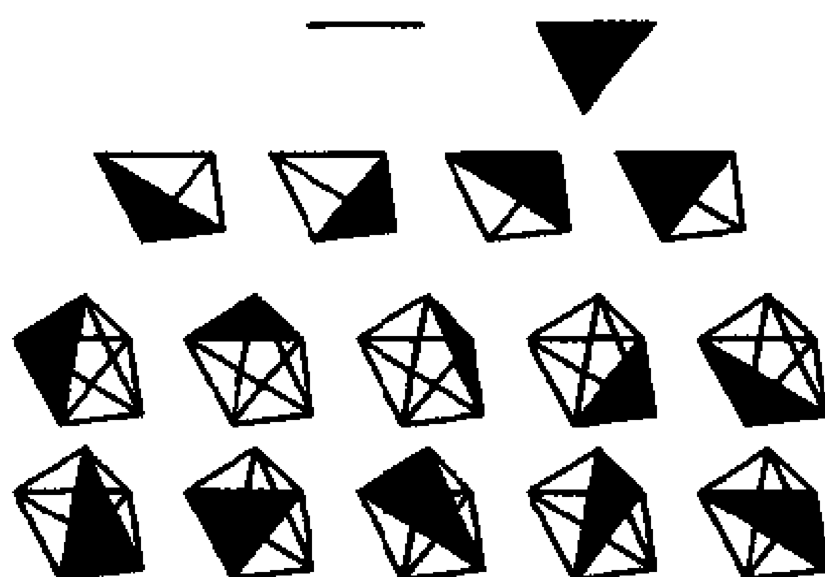


图 42　由完全图展示的不同的三角形表示每三个顶点的子集决定一个三角形,因此计数三角形就等价于计数顶点的三重组.

点　数	1	2	3	4	5	6
棱　数	0	1	3	6	10	15
三角形数	0	0	1	4	10	?

为了填上空缺的值,我们从模式来思考,这些模式中许多就正好和把棱和点关联在一起的模式一样.因为三角形的数目和三个不同点组的数目相等,三角形的总数正好是从某些对象中每次取 3 个的组合数.正如上面所讲的,我们也可以采取另外一种方法,即递推关系:在每一阶段三角形数目等于原有的三角形数目加上原有的棱数之和.它最方便地计算出来:由 6 个点形成的图的三角形数是 20.[一般来讲,由 n 个点形成的图中三角形的数目是 $n(n-1)(n-2)/6$.]

已经学过一些代数的学生能够把这些数同二项系数联系在一起: [52]

$$(a+b)=a+b$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

去掉文字因子就得出帕斯卡三角形的偏移形式：

1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

例如，第 4 行相继给出当 $n=0,1,2,3,4$ 时，由 4 个点出发组成的 n 个顶点的图形的数目：中间是点数、线数和三角形数目，两端是空集和整个集合（分别对应 $n=0$ 和 $n=4$ 的数目）.

有观察力的学生还能看到另外一个重要的模式：任何一行的各数之和是 2 的方幂. 这个观察还可以用更精密的方式来陈述：一个 n 维单形的每个不同维数的单形（包括整个单形和空单形）的数目总和是 2^{n+1}. 在二项式展开式的表中令 $a=1, b=1$，或者把二项系数与 $n+1$ 元素每次取 $k+1$ 的组合数联系起来，也可以观察到同样的关系. 从而所有可能的组合数为 2^{n+1}，即由 $n+1$ 元素选出的所有子集的总数. 这个基本的计数论证可以引发许多初等概率论的课题.

正方形和正方体的计数

如果学生研究立方体和各种超立方体的顶点、棱和面的数目，就会得出同样的观察. 正如每个单形之内有一个子单形的层系，在每个 n 维立方体之内也有类似的正方形和立方体序列. 一个 3 维立方体有 8 个顶点，12 条棱和 6 个正方形，这可以通过真正去数来验证. 1 个正方形（或者 2 维立方体）有 4 个顶点，
[53] 4 条棱和 1 个正方形. 一个 1 维立方体是一个线段，具有 2 个顶

点和 1 条棱.一个 0 维立方体是点,具有 1 个顶点.这些数据形成另一个表的开头:

维数	0 维立方体 (点) 顶点	1 维立方体 (线) 棱	2 维立方体 (正方形) 面	3 维立方体 (正立方体) 立方体	4 维立方体 (超立方体) 4 维立方体
点	1	0	0	0	0
线	2	1	0	0	0
正方形	4	4	1	0	0
立方体	8	12	6	1	0
超立方体	16	?	?	?	1

如果我们试图填上超立方体的空缺的数目,这个过程稍微困难一些.我们知道如何生成一个超立方体,即把一个通常立方体沿着垂直自身方向平移.当立方体移动时,8 个顶点描绘出 8 条平行棱,这样原来立方体的 12 条棱,平移后的立方体的 12 条棱以及平移过程中描绘出的 8 条新棱,产生出超立方体的总共的 32 条棱(图 43).

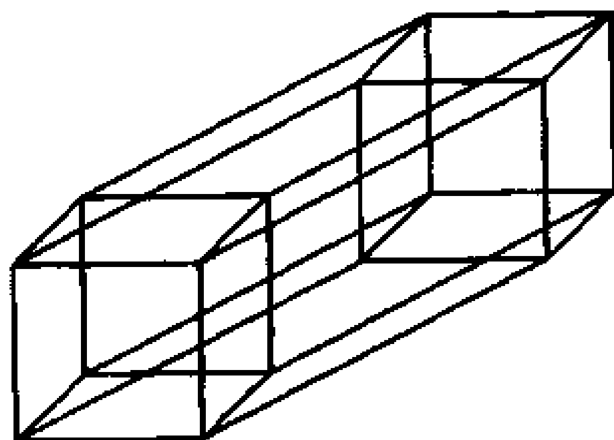


图 43 超立方体的框架:两个立方体用棱相连产生 16 个顶点和 32 条棱.

计数正方形提出又一个问题,可以用同样的方法去解决它.首先注意原来的立方体有 6 个正方形,移动后的正方形也有 6 个.除了这 12 个正方形之外还应该加上移动正方形的棱画出的

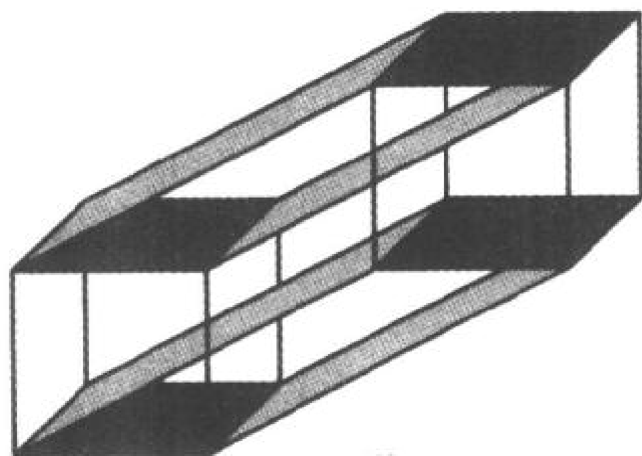


图 44 涂上阴影可以帮助我们确认超立方体中两个水平组，每组有 4 个平行正方形.一共有 6 个正方形组，3 组与原来的立方体及其移动后的立方体有关，3 组与连接两个立方体的棱有关.

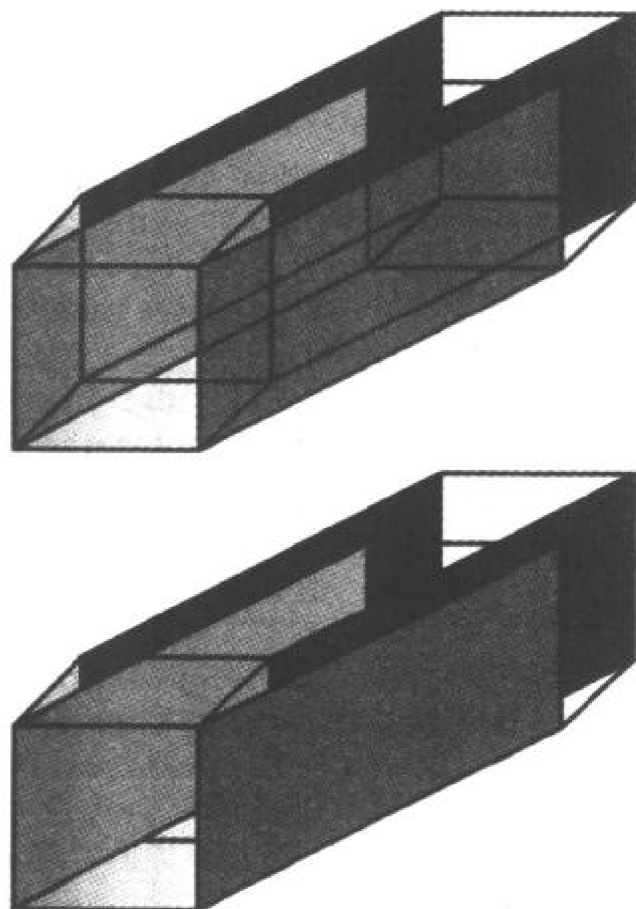


图 45 超立方体4个垂直正方形的一组由原来立方体的水平位移所决定.如果去掉背景线条，就更容易看到这些正方形，如图 45 中的下图所示.



正方形.把平行丛的棱和正方形分成几组对我们有所帮助,超立方体的棱分成 4 组,每组 8 条平行棱.同样正方形也可分为 4 组,每组 4 个平行正方形,通过每个顶点有其中一个正方形.2 组水平正方形很容易就看到(图 44).而当我们去掉一些多余的线,就能更清楚地看到另外一组的 4 个垂直面(图 45). [54]

学生小组很容易确认其他 3 个四正方形组.如果四个正方形不重叠,则更容易确认.如果它们重叠较多,则确认就更加困难,整个集合包含 24 个正方形.

当对象具有大量的对称性,就像超立方体那样,则对棱或面分组就特别有效.我们能通过观察不同的维数来研究对称性和分组之间的关系.立方体、正方形和线段的对称性可以通过下面方法看出:在每一个顶点以不同的方式置换诸棱,以及把每个顶点移动到另一位置.立方体或超立方体的所有对称的集合是群的重要例子,它是反映几何性质的代数结构.立方体的对称群是保持其结构的顶点置换的集合.把置换和代数与几何结构的对称性的关系加以整理的尝试在过去两个世纪给近世代数的发展提供了重要的动力.即使现在,对称群还继续为原子物理的理论研究提供燃料. [55]

对超立方体最重要的认识是超立方体是高度对称的,以致每一顶点都和其他每一顶点看起来完全一样,也就是假如我们知道一个顶点出现什么情况,我们就知道所有顶点上会出现什么.例如,超立方体的 16 个顶点中,每一个都有 4 条棱,因此共有 64 条棱.但是每一条棱计数两次,所以真正的棱数是 64 的一半,即 32 条.

每一顶点数处都有一些正方形面.有多少呢?它的数目与从一个顶点处的 4 条棱中选出 2 条的选法数相等.一旦我们选中一条棱,第二条棱就只有 3 种可能性,这样得出 12 对棱.正如上述情形,这个表中每对棱出现两次,只是顺序不同.因此,这 12 对棱在每一个顶点产生 6 个不同的正方形,全部 16 个顶点

产生 96 个正方形，但是每个正方形计数 4 次，每一顶点算了一次．因此在超立方体中一共有 96/4 = 24 个正方形．这种推理证实了我们在立方体的画图中直接计数 6 组(每组 4 个正方形)的结果．但是它可以由方法得出，这种方法甚至应用于 5 维立方体也行．

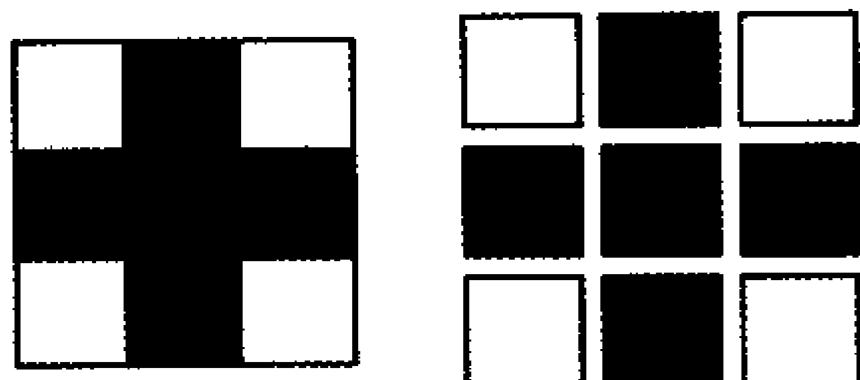
寻求模式

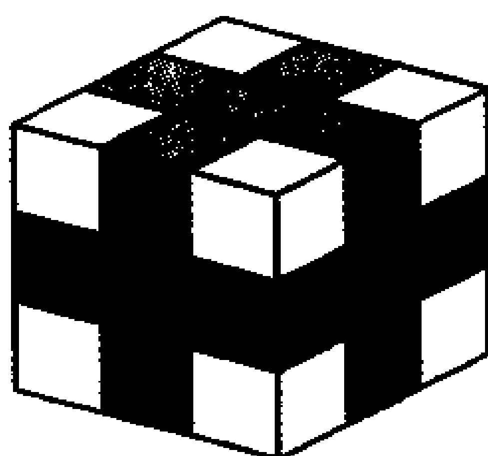
高年级学生能把这些结果表示成一个一般公式．设□(k, n)表示 n 维立方体中 k 维立方体的数目．为了计算□(k, n)，我们也像以前一样，首先计算在每一个顶点处有多少个 k 维立方体．每个 k 维立方体由每顶点出发的 n 条棱中的 k 条不同棱的子集所决定．因此，在每个顶点处，k 维立体的数目为 $C(k, n)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\ (n-k)!}$，即 n 个事物每次取 k 个的组合数，因为在 2^n 个顶点中，每个顶点都有 $C(k, n)$个 k 维立体，k 维立体的总数表面上看是 $2^nC(k, n)$，但在计数中，每个 k 维立体都数了 2^k 次，因此，我们要用 2^k 去除上面的数，得到最后公式：

$$□(k, n)=2^{n-k}C(k, n).$$

我们记得由单形表中由每行的和得出 2 的方幂，我们自然对立方体也寻求类似的模式．在这种情形下，每一行加起来得出 3 的方幂：

维数	0 维立方体 (点) 顶点	1 维立方体 (线) 棱	2 维立方体 (正方形) 面	3 维立方体 (正立方体) 立方体	4 维立方体 (超立方体) 4 维立方体	总数
点	1	0	0	0	0	1
线	2	1	0	0	0	3
正方形	4	4	1	0	0	9
立方体	8	12	6	1	0	27
[56] 超立方体	16	32	24	8	1	81





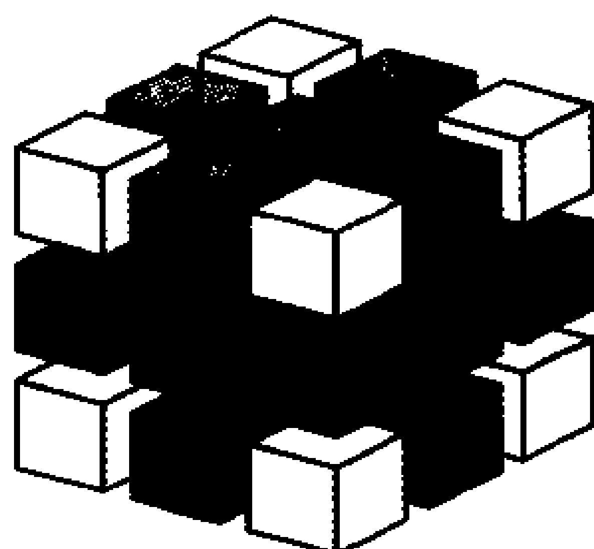


图 46 把线段、正方形和立方体(甚至超立方体)的边分成三等分得出 3,9,27 或 81 个相同的小立体——都是 3 的方幂. [57]

我们有几种方式对这个观察做出反应.我们可以再把表添加一行得出更多的信息.不过,表上 5 个填满的行已足够确定地证实我们的猜想.我们可以看出,表中每一个数都等于它正上方数的两倍加上该数左边的数,因此每一行的数目之和是上一行数目之和的三倍,这个论证可以很容易翻译成用数学归纳法的正式证明.我们还可以用 n 维立体中 k 维立体数目的明显公式去对典型的一行求和:

$$\square(0,n)+\square(1,n)+\cdots+\square(n-1,n)+\square(n,n)$$
$$=2^n+C(1,n)2^{n-1}+C(2,n)2^{n-2}+\cdots+C(n-1,n)2+C(n,n)$$
$$=(2+1)^n=3^n.$$

所有这些方法都帮助我们理解每一行之和都是 3 的方幂.但是,或许证实这个事实最满意的观察是看到下面的事实:我们可以把一个 n 维立方体的边分成三个等分,每边都这样切下去就把整个立体分成 3^n 个小立体(图 46).结果由原来的立体的每个顶点都得到一个小立体,每一条棱也得到一个小立体,每个 2 维面也得到一个小立体,如此等等.最后的小立体就是中心那个.因此,小 n 维立体的总数是 3^n,它等于 n 维立体中 k 维立体的数目之和,因为在每个点,每条棱,每个面,每个 3 维立体……上都有一个小 n 维立体.

弗利德里希·弗洛贝尔的幼稚园的礼物之一是分成 27 个小立方体的立方体,他会喜欢我们这个最后的证明的.

参考文献和推荐读物

1. Abbott, Edwin Abbott. *Flatland*. London, England: Seeley & Co., 1884; numerous reprintings, especially Blackwell's (1926) and Dover (1952).
2. Banchoff, Thomas. *Beyond the Third Dimension: Geometry, Computer Graphics, and Higher Dimensions*. New York, NY: Scientific American Library, W.H.Freeman & Co., 1990.

3. Banchoff, Thomas and Strauss, Charles. *The Hypercube: Projections and Slicing*. Chicago, IL: International Film Bureau, 1978.

4. Botermans, Jack. *Paper Capers*. New York, NY: Henry Holt and Company, 1986.

5. Barnsley, Michael. *Fractals Everywhere*. San Diego, CA: Academic Press, 1988.

6. Critchlow, Keith. *Order in Space*. New York, NY: Thames and Hudson, 1969.

7. Davidson, Patricia and Willcull, Robert. *Spatial Problem Solving with Paper Folding and Cutting*. New Rochelle, NY: Cuisenaire Company of America, 1984.

8. Dewdney, Alexander. *The Planiverse*. New York, NY: Poseidon Press, 1984.

9. Ernst, Bruno. *Adventures with Impossible Figures*. Norfolk, England: Tarquin Publications, 1986. [58]

10. Heinlein, Robert. "... and He Built a Crooked House." In Fadiman, Clifton (Ed.): *Fantasia Mathematica*. New York, NY: Simon & Schuster, 1958.

11. Froebel, Friedrich. *Education by Development*. New York, NY: D. Appleton & Company, 1899.

12. Gardner, Martin. *Mathematical Carnival*. New York, NY: Alfred A. Knopf, 1975.

13. Hix, Kim. *Geo-Dynamics*. Conestoga, CA: Crystal Reflections, 1978.

14. L'Engle, Madeleine. *A Wrinkle in Time*. New York, NY: Farrar, Straus, and Giroux, 1962.

15. Manning, Henry Parker. *The Fourth Dimension Simply Explained*. New York, NY: Macmillan and Co., 1911.

16. Pearce, Peter and Pearce, Susan. *Polyhedra Primer*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1978.

17. Pearce, Peter. *Structure in Nature Is a Strategy for Design*. Cambridge, MA: MIT Press, 1978.

18. Peterson, Ivars. *The Mathematical Tourist*. New York, NY: W.H Freeman & Co., 1988.

19. Rucker, Rudy. *The Fourth Dimension: Toward a Geometry of Higher Reality*. Boston, MA: Houghton Mifflin, 1984.

20. Tufte, Edward. *The Visual Display of Quantitative Data*. Cheshire, CT: Graphics Press, 1983.

21. Wells, David. *Hidden Connections, Double Meanings*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1988.

22. Wiebe, Edward. *Paradise of Childhood, Golden Jubilee Edition*. Milton Bradley (Ed.), including a "Life of Friedrich Froebel" by Henry Blake, Springfield, MA: Milton Bradley Company, 1910.

23. Winter, Mary Jane, et al. *Spatial Visualization*. Middle Grades Mathematics Project. Menlo Park, CA: Addison-Wesley,
[59] 1986.

(赵慧琪,胡作玄)

数　量

詹姆斯·T·费

人类智力发展的主要因素之一就是希望了解我们所生存的物质世界和生命世界的意义.我们探索历史记录是为了找到线索,来解释我们现实的状况;我们发明理论是为了预测未来.在几乎每个对过去的描述或是对未来的预见中,最重要的因素就是涉及数量的特征:河流的长度、土地的面积、海洋的体积;大气层的温度、湿度和压力;物种的数量、分布及其生长率;抛物体、潮汐和行星的运动;经济活动中的收入、成本和利润;声音、光和地震的节奏、强度和频率.

富有洞察力的观察家们注意到,对象的模式可以依靠有助于推理的数来模拟.正如凯尔文勋爵(Lord Kelvin)曾经说过的:[32]

> 当你能够权衡你所说到的事情,并且能用数来表达时,你就算了解了它;但是如果你无法权衡它,也不能用数表达它时,那么你对事物的认识就显得肤浅和不适当.

这种说法也许有些夸张.不过,我们可以毫不夸张地说,数学中的数系是人类了解我们生存的物质世界所不可缺少的工具.

人类对数的兴趣还反映在无数荒诞或迷信的数秘术的例子

中.从古希腊的毕达哥拉斯学派到马丁·加德纳(Martin Gard-
[61] ner)虚构的矩阵先生,[10]无论是在高尚的还是邪恶的方面,人们都已发现了与字母、词语、名称、地点和日期相关的数值的含义.无数多种关于数的模式激起了数以百万计的不同年龄段的专业的和业余的数学爱好者学习数学的兴趣.不幸的是,这些模式也会被各种伪科学所利用——从占星术到数秘术.

学校数学中的数量

考虑到数量推理在数学应用方面的根本作用以及人们与生俱来的对数的兴趣,那么数的概念和技巧作为学校数学的核心内容并非出人意料.最低年级的孩子们开始学习数学时,总是企图学习算术的计算过程以及相应的概念,用以解决数量问题并作出合理的决定.孩子们要学会多种利用数字、图表以及符号来刻划数据及数量关系的方法;要学会列算术和代数式并能利用有效的方法解决这些问题;要学会解释数量信息,然后做出推断并验证结论的合理性.

完成上述任务所需要的技巧包含在各种数系的算术以及算术推理的一般形式——初等代数之中.一般人把这些数系俗称为整数、分数、小数;数学家们则用专业术语称之为整数、有理数、实数.不管它们的名称,这些数系都是数学的重要组成部分,而且几个世纪以来一直是学校教学的内容.经验丰富的教师们已经发明了无数多种颇有成效的教学法用以开发学生解决传统问题的技能.因此,人们完全有理由询问:“在教授数量推理的过程中,哪些材料可能是新的并令人激动呢?”出乎人们的预料,答案应该是:“几乎所有的一切!”

技术的影响

学校的算术和代数课一直总是主要培养学生运算数字和代数符号的技能,其目的是为了回答算术问题或是解代数方程.初

等中学数学的核心内容是以整数和分数的加、减、乘、除运算为特色；中学数学的核心内容包括多项式、有理式及指数形式的类 [62] 似运算.

在过去，熟练掌握这些常用的运算技巧早已成为数学的有效利用的先决条件.然而，廉价的电子计算器和计算机的出现永远改变了这种状况.自从用晶体管、印刷电路和硅片技术首次研制成手持计算器到它在广大消费市场上的利用，至今已有 15 年时间.随着电子行业的迅猛发展，现已生产出了太阳能科学计算器，它可以对输入的小数、常用分数或指数形式进行显示并且能进行数的算术运算.许多计算器还有单键子程序，可用于初等函数估值和完成常用的统计计算.程序化的计算器提供了更多的功能，其中包括作图、符号操作以及矩阵运算(见图 1).现在，随着桌式计算机在学校的普及，上面提到的这些数学运算还可以通过更有效、更精密的形式——计算机程序来完成.

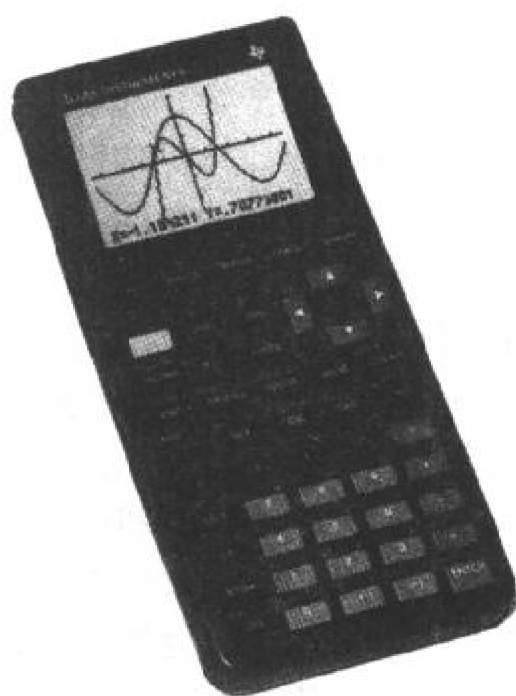


图 1 手持计算器现在能显示学校数学课中常见的所有函数的图象，有些计算器甚至能进行最普通的化简及解方程的符号运算.

计算机的计算能力,不论是客观存在的还是可以想象得到
[63] 的,使人们做到了以前课堂上做不到的一些事.现在,初中生们毋需预先掌握关于那些数的运算的复杂算法,便能处理真实的数据——很大或很小的小数和分数.中学生们在他们掌握变量、函数和关系的运算法则之前很长时间,就能处理有关变量、函数及用代数语言表示的关系方面的问题.在校外,几乎每个人都要用计算器和计算机进行快速而准确的运算.但是,学校的课程还必须做巨大地调整才能适应新环境的变化.

计算器和计算机对数学本身的发展同样具有深远的影响.利用这些工具,科学家通过系统地操作变量来发现实验结果,而数学家可以用大致相同的方式寻找数学模式.实验数学家可以用一台计算机在比“纸-笔”算法短得多时间内处理一些特殊问题,而且在许多情况下这些计算靠传统方法根本行不通,其中该出现的模式也看不到.数学的实验数据可以被归类、分析,或用图表表示,从而揭示其规律和变化的程度,检验的唯一标准依然是靠公理化基础推理证明.不过,计算器和计算机在发现定理和证明定理之间创立了一种新的平衡.

在数学工作中,计算器和计算机的使用还使人们对算法和结果产生了浓厚的兴趣.许多最深奥的、最漂亮的数学结果保证了带有趣味性的数或者重要方程的解的存在性,然而这些定理及其证明并没有告诉人们如何有效地构造所要求的对象的线索.欧几里得(Euclid)同时代的数学家就证明了不存在最大的素数,而且证明了任何自然数无论如何都可以唯一地分解成素数的乘积.但时至今日,由于实践和理论问题的需要,一些数学家仍在费尽心思致力于构造最大的素数并寻求较大合数的因子分解形式.在当代技术发达的世界中,探索适于计算机编制程序的有效算法,已成为基础数学和应用数学研究的中心内
[64] 容.

应用的影响

影响学校全部课程的第二种基本变化是数量方法的广泛应用，它几乎应用于当代个人和专业生活的每一方面.虽然数总是实用的，但它们的用途的确可预测而且仅限于一些较熟悉的问题.今天，数量技能要求我们有能力去解释在下面情形下所用的数：描述确定性现象以及随机现象中所用的数，用复杂的相互关连的变量集合进行推理中所用的数，以及对没有标准模型的现象设计定量方法并加以严密解释时所用的数.在我们身边的例子比比皆是：

●美国的普查数字用于描述我们目前的人口状况及其资源在各种社会计划中的分配情况.那么，怎样才能更准确地计算出人口数目及其特征呢？

●每年秋天都有几次飓风袭击中美洲和北美洲.那么，如何用最有意义的方法测量出每次飓风的"规模"呢？

●消费价格指数是用来计算社会保障体系所支付的生活费用的增长与许多其他工资等级表.那么，如何能准确测量通货膨胀呢？

●在橄榄球队的不同队会上，常用统计方法比较哪位队员的球技高，以便相应地给以补贴.那么，应该使用什么数据才能更精确地划分四分位队员的等级呢？

●银行、信用卡公司以及航空公司和宾馆预订系统每天处理数十亿的商务交易，使用全国性通讯网以防出错及未经批准的闯入.那么，安全系统如何设计并明智地使用呢？

解决这些问题和许多其他类似的复杂而有意义的问题，需要具备组织、操作和解释数量信息的能力.要解决这些任务，若仅采用传统的算术和代数算法或者采用对传统文字问题的求解技巧，不仅不够用而且在很大程度上不相干.

有数量技能的年轻人需要具备变通能力使他能在新条件下

识别对象间的重要关系，用有效的符号形式表示这些关系，利用计算工具加工信息和解释这些计算结果．在建模中基本的数学思想通常超出了数和分数的范围，用到了矩阵、线性代数和同余类算术．实用的计算工具超出了手持计算器的范围，用到了空白
[65] 表格程序、数据库和动态仿真．

心理研究的影响

最近对人类认知方面的广泛研究，使得学校数学对数量的教学成为又一种改变．虽然从心理学的角度数学教与学的研究经历了很长时间，但是只是在过去的 30 年中，年轻人逐步开展了对数系的理解及其应用问题的探讨才取得了空前的进步．因此，研究人员对于人类认知发展与我们想要年轻人所学的概念、原理和技巧之间的相互影响产生了深刻的认识．这项研究表明了关于课程设计的通报结果及学校数学中的启发式教学法具有现实的可能性．

基 本 概 念

对于数量技术在社会和科学的应用越来越增长的需求同支持这些技术的强有力新技术的结合促使人们重新考虑学校数学的教学目的．重复 1982 年数学科学理事会上一篇报告的题目，[29]我们一直在询问，“在未来的数学中，什么样的数量能力才是基本的呢？”尽管在过去十年我们已对这个问题进行了广泛的专业性讨论，但至今仍没有对数学教学内容的变动达成一致意见，并且许多事实表明学校还没有发生根本性改变．

在成熟的数学分支诸如数论、分析或代数中，许多基本概念与运算都是建立在一个抽象思想体系的基础上，即以若干定义和公理为基础，其他事实和原理由此合乎逻辑地推出．不过，代数学的这种严谨而有效的体系是历史长期发展的产物，并且这些基本思想在演变为正式定义和定理之前很长时间，都是被非

正式使用的.而且,实际工作知识不仅需要具备背诵或是推导结论的能力,还需要具备识别各种具体问题中的数量关系以及表达和解释这些数量关系的技巧的能力.

在考虑学校数学时,许多数学家和教师都主张:沿着数的技巧发展的曲折历史道路讲授数学,这才是最好的教学方法.其他人认为,我们应该将重点放在所得结论的结构分析上,这样就可以给孩子们提供发展数的概念和技巧的更有效的方法.目前还 [66]
没有研究证据表明这些观点哪一个正确,但是可以肯定地说,对数量的理解需要深入理解事物的方方面面,重要的是应尽快地向学生们传播表示或解释数据的有效的现代技术.但是毫无疑问,这种训练只有在充分了解人类实践中数的技巧产生的根源

“多少”这类问题.

2. 次序：用数来表示序列中“大于”或“小于”的位置关系.

3. 编码：在由许多对象构成的集合中，为每个对象编一个不同的号码来加以识别.

现举一些实例说明日常生活中常用的这三种基本任务：[7,33]

●标准的测量任务，如测量长度、面积、体积、质量和时间概念时，都用数表示大小.数的加、减、乘、除运算直接与被测对象的求和、比较和分解运算相对应.还有一些重要概念诸如速度、
[67] 加速度和密度，也要用数来刻划其大小，不过，它们的大小通常是在测量值的基础上通过运算得到的.

●当顾客进入一家商店时，他们常常会得到一个数码，以此表示他们被服务的次序.先来的顾客其数码比后来的顾客的数码小——到达的次序与享受服务的次序相对应.这样就可以用正整数表示次序.虽然数的相减能帮助估计等候服务的时间，但是数的相加或相乘则没有任何意义.

●任何运动协会的每个运动员通常是按他们的比赛水平排序的，从第一排到最后.不过，如果没有其他的信息，这种排序则无法反映队与队之间的差距.

●在分析随机试验时，对每个可能的结果都可以用 0 与 1 之间的数表示它们所发生的可能性.事件 A 比事件 B 发生的可能性大等价于概率 $P(A)>P(B)$.因此，当事件 A 与 B 互不相容时，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.在这种情形，概率表示了事件发生的可能性的大小.反过来，再利用概率依事件发生的可能性为事件排序.互不相容的事件的并集运算与有理数的加法运算相对应.

●运动队的队服上通常都印有号码.虽然这些号码有时表示运动员的指定位置，但对这些号码进行算术运算或关系运算没有任何意义.这些号码仅用作编码.

上述对数的应用的分类方式似乎太简单而不值一提.但是，

这种分类方式却为大量的数量推理任务组织成一个可处理的系统框架迈出了第一步，也就是它提供了一种从零散的数的概念、技能和应用中找到具有意义的主题的方法．这种分类方式经过适当提炼后可以帮助老师和学生揭示数的实践意义，这样做恰好起到了既见树木又见森林的教育作用．

为此，尤西斯金（Usiskin）和贝尔（Bell）对数的基本应用进行了更具体的分析，他们认为单个数有6种不同的用途：

●为离散集体（人口或群体）计数；

●连续量（时间、长度、质量）的测量值；

●比率比较（折扣、概率、地图标度）；

●定位（温度、时线、测验分数）；

●代码（公路、电话、产品型号）； [68]

●公式中的常数（如 $A=\pi r^2$ 中的 π）．

与上述分类法平行的一种分类提出了使得数的运算可以与数所描述的对象的运算相对应的方式．

●以加法做合并或移入的模型；

●以减法做拿走、比较、移出或加法的逆运算的模型；

●以乘法做大小的变化、交叉相乘或比率因子的使用的模型；

●以除法做比、率、比率除法、大小变化除法或乘法的逆运算作为模型．

虽然数学家和老师们可能会对这类范畴的意义及其完备性或独立性提出疑义，但是，对这种分析的关注，似乎肯定把教学的注意力转向帮助学生有效地使用数来解决问题这一基本任务上来．数以不同的方式被使用的例子，恰好择其要点地说明了任何数量推理任务的基本构成．简而言之，数量推理涉及现象、数系以及现象与保持基本结构的数之间的对应关系，每个对象以这样的方式被指定一个数，即“相似的”对象具有“相似的”数以及对象间的关系对应数系中的关系．为了理解这种建模过程，学生们需要对各种数系的结构性质有深刻的认识．

虽然学生们必须掌握处理许多具体的数的应用方面的相当不错的技巧,但是他们还要对数的应用所共有的性质有广泛的了解.人们从数学教育的研究中发现,对数学系统的基本结构特性的理解有利于这些系统的记忆及其对新问题的应用.因此,学校数学应该强调不同类型的数系可以作为测量、排序和编码的模型,同时强调标准运算在数量问题中的基本的模型作用.

变量与关系

数的基本用途集中于对特殊的定量事实进行描述和推断.例如,每个糖棒 50 美分,5 根糖棒值多少?一块长 50 英尺、宽 30 英尺的土地的面积,一辆小汽车 5 小时行驶了 300 英里,求
[69] 它的平均速度.掌握这些任务所要求的概念肯定是学校数学教学任务的重点和难点.但是,对于数量推理所得到的结果远比那些单纯用数刻划的事实更具威力,这种数量推理稳固地根植于数和有关计算的一般模式之中.

典型模式是描述两个或多个不同数量之间的关系.例如:

● 随着时间的推移,有潮深水河段里水的深度按照周期模式增加和减少;

● 随着银行储蓄利率的提高,每个月定期储蓄利息也随之提高;

● 若有一列正方形,其边长依次为 1,2,3,4,5,…,则它们的面积依次为 1,4,9,16,25,…;

● 对于任何底为 b,高为 h 的长方形,其周长 p 等于 $2b+2h$.

解决这些模式所需要的关键数学知识是初等代数中的一些核心概念:如变量、函数、关系、方程、不等式及变化率.如今在学校数学中,学生们要花大量时间学习用字母表示未知的变量以及对这些数加上条件的方程或不等式.代数学教学集中于对符号表达式进行变换的形式过程和解方程求变量的隐藏值.

但是这些技巧仅是代数学所提供的一小部分内容.在上述

每个例子或其他无数的类似的问题中，概念的核心是要理解几个变量之间的关系.学生们所需要理解的变量的概念并不单纯是指一种"表示数的字母"或"方程中的未知数"，它还必须包括随着发生条件的变化而变化的可测量的变量.

变量本身通常并没有意义，但是只有在与其他变量发生关系时才显得意义重大.在代数学大多数实际的应用中，基本的任务并不是求满足特殊条件的 x 的值，而是"对所有的 x"分析 x 与 y 之间的关系.考虑这种关系，最有用的代数学思想是函数的概念.

为了培养学生们对代数学所要求的实际应用的理解力，他们需要接触和分析由变量之间的关系所刻划的各种各样的情况.他们需要理解下面几种关系语句：如"y 依赖于 x"，"y 是 x 的函数"，或"x 的变化引起 y 的变化".如果他们能开发判据的 [70]
宝库，根据他们所遇到的关系的结构特点把这些关系加以刻划和分类，将会对他们的学习有所帮助.例如，美国科学促进协会的报告《为了所有美国人的科学》指出学生们至少应对以下几种变量之间的关系十分敏感(见图 2)：

- 正变化和逆变化——当一个变量增加时，另一个变量也以类似的比率增加(或减少)；
- 加速变化——当一个变量均匀增加时，另一个变量以增加的比率增加；
- 收敛变化——当一个变量无限增加时，另一个变量趋向于某一极限值；
- 周期变化——当一个变量一致增加时，另一个变量则周期性地增加和减少；
- 阶梯变化——当一个变量增加时，另一个变量跳跃式地变化.

学习整个关系族的性质所体现的思想，在所有数学中都是典型的：从表面上截然不同的现象认识其结构的相似性使我们

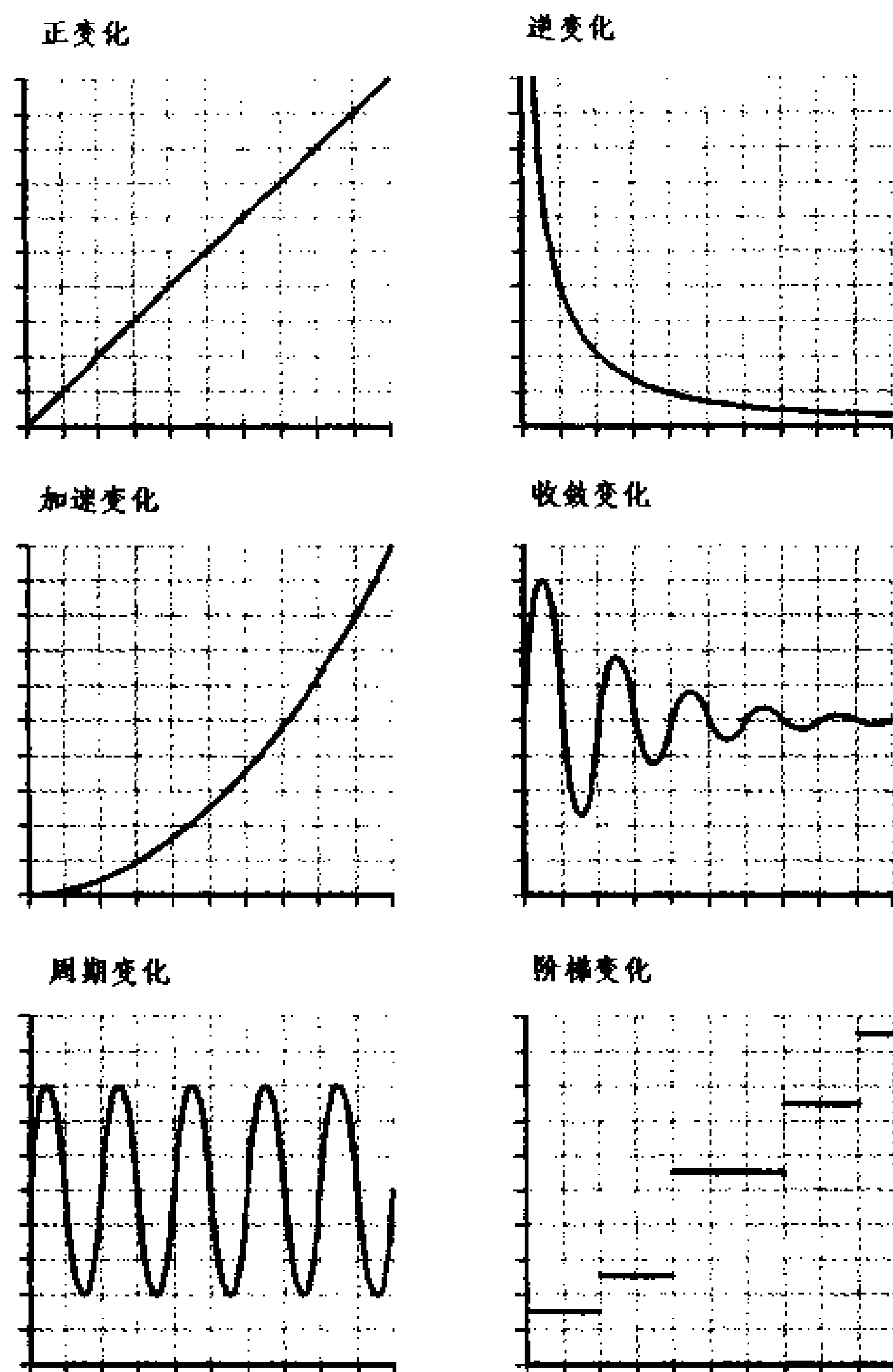


图 2 以上几种基本类型的变量之间关系的特点可以从具有代表性的图形中看到.图(a)和(b)刻划了正向关系和逆向关系;(c)和(d)刻划了加速变化和收敛变化;(e)和(f)刻划了周期变化和阶梯变化.事实上,

〔71〕 所有实际观察到的变化都是由这些基本变化复合而成的.

能应用成功的推理方法去解决新问题.由于代数学的侧重点转向了变量和函数,人们可以应用方程与不等式表示特殊的条件:

●如果抛射物的高度是其飞行时间的函数,满足 $h(t)=-16t^2+88t$,那么用方程 $-16t^2+88t=0$ 可以问何时抛射物才能落在地面上(见图 3).

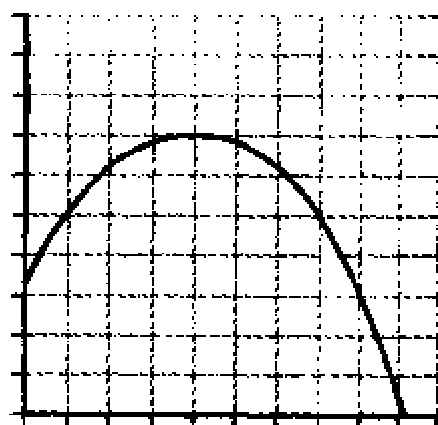


图 3 抛射物的高度是其飞行时间的函数,其函数图象是标准的抛物线轨道.

●如果一个国家的人口(单位:百万)是时间的函数,满足 $p(t)=120\times(2^{0.03t})$,那么不等式 $120(2^{0.03t})\leqslant 200$ 表示了何时该国家的人口保持在 2 亿以下(见图 4).

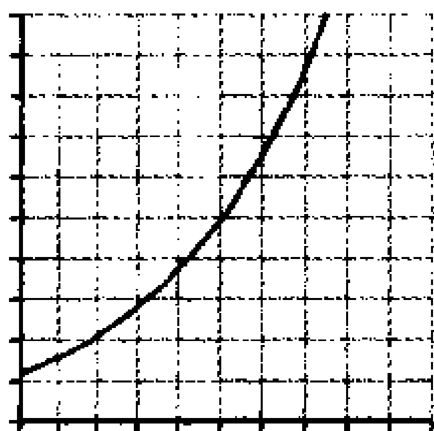


图 4 普通指数曲线描绘了一个国家人口增长所满足的方程.

当然,把数量关系理解为函数促使我们思考超出用熟知的方程描述的问题,扩大到对象的变化率、极大极小和总趋势的概
[72] 念问题.虽然这些问题一般不是学校代数所考虑的核心内容,但它们无疑是用代数表达式建模的任何情况下应考虑的重要问题.

程　　序

有效解决问题的第一步是分析问题,确定与问题条件相匹配的数的概念,但这只是解决问题的建模阶段的一部分——用概念描述已知对象.解决问题还需要推断出能产生新见解的新信息.在数学中,这种推断始终依赖表示信息及处理信息的综合技巧,对于数量问题,还要依赖计算结果的过程.最近数学教学法的分析把这种知识称为“程序”知识,为的是与“概念”知识(即需要确定基本思想的知识)形成对比.[14]程序知识包括表示信息的技巧及实施运算得到特殊数值问题解的技巧.

数的表示

形式数学是一门研究从对象的模式中抽象出的心智构造的学科.不过数学家们要花很大的精力才能找到在具体形式中表示数学思想的方法,其目的是建立用毫不含糊和紧凑的形式有效地传播数学信息的符号体系.

人类思想的表示有助于记忆,而且是交流的中介.数学表示本身也是研究的对象——这种新的抽象资料常常作为具体情况
[73] 下待定模式的有用模型.

能够有效地表示数的基本思想的是数的位值制.用标准的以 10 为底的计数法,每个整数都有唯一的表示,每个有理数都可以表示成十进制分数或整数商的形式.这些常用的数系有时被不同底数的位值制所代替,特别是为达到某种特殊目的,采用不同底的位值制计数法显然有助于问题的解决.

虽然数的位值制今天看起来显而易见，但是在数学教学中应该记住这种强有力的表示系统的演化过程经历了很长时间．在早期美索不达米亚数学时代就有使用 60 进制计数法的记录．然而，位值概念到了希腊数学的黄金时代却一度失去了它的魅力，直到公元 8 世纪印度数学家认识到 0 的位置作用后，才真正获得了位值概念的基础．

表示数的信息的第二大任务是表达对所有的数不管是许多数还是某些未知数都成立的关系．所涉及的基本的数学概念是变量、函数及关系．我们现在习惯用字母命名变量，并用字母书写函数和关系．但是，值得注意的是，当代代数学概念的历史发展是一个漫长的过程——其事实证据是用像 $y = x^3 - 4(x+2)^{-1}$ 这样的代数语句刻划变量之间关系的过程决非显然．

图 象 表 示

虽然传统的位值数码和代数式都是记录数量信息的最重要的符号形式，但是许多其他表示形式也常用．最常用的是用直线上的点表示数，用平面上的点表示数对．

例如，像 $|x-2| \leqslant 3$ 这样的变量条件在代数及其应用方面很常见，它的解可以用类似的符号形式给出，不过把它的解画在数直线上也差不多同样常见（图 5）．虽然图象表示不像符号描述那样紧凑或便于计算，但是它可以使人们对数所满足的条件有一个全面形象的认识．

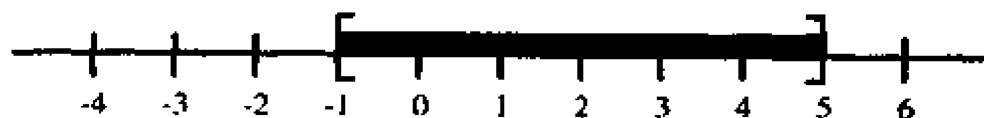


图 5　数直线上的粗线画过的区间就刻划了满足 $|x-2| \leqslant 3$ 的所有点．

当一个变量是另一个变量的函数时，用可视表示展现变量

[74] 间的关系就特别方便，下面是一个常见的例子：4 英寸厚的活塞压入以 3000 转/分的速度运转的机器中，活塞的位置可由函数 $y = 2\sin(100\pi t)$确定，t 表示时间，单位为秒．活塞位置的模型可由函数图象描绘（图 6）．像数直线图象一样，这种刻划两个变量间关系的可视图形，并不能有效地帮助计算，但它能揭示活塞运动的明显的周期模式，而符号表示显然没有图示那么明显．

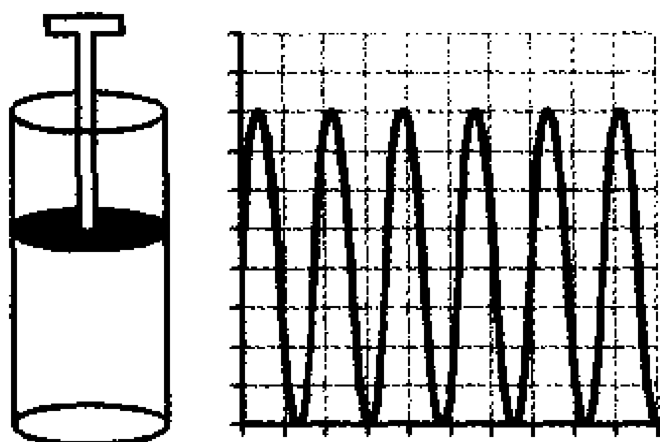


图 6　活塞的运动可用正弦曲线刻划，由图可见它比代数式能更有效地描述某些信息．

应用数直线和坐标图象是人们很熟悉的数学技巧．不过图象计算器和计算机软件的出现，却给人们作图及其应用带来了极大的便利．现在人们利用公式、科学试验得到的数据或是计算机所接触的大量数据迅速而准确地作图，已成为可能．结果，图象显示变得越来越普通而且越来越复杂．因而，对数学学生来说，重要的是要善于合理地解释图象表示，并且理解代表同一思想的符号的、图象的及数码的形式之间的联系．

在教学中，曾对使用这些相互关联的多种表示形式的潜在好处抱有很大希望．但是，早期的经验告诉人们图象所提供的信息并不像人们想象的那样容易被初学者掌握，而且计算机显示
[75] 的固有的尺度和有限的视窗会产生惊人的感性的误解．

计算机表示

数字模式和代数模式的笛卡儿图象仅仅是在一系列对定量数据可视表示中的最熟悉的方法.

正在发展的图论和网络理论包含许多表示相互作用的数量结构和空间结构的新技巧.有些情况网络图可用来表示沿各种可能的途径托运货物或铺设公用线路所需费用的数量信息.其他情况数字表示(如矩阵)可用来组织、描述一个图象的数码之间所有可能通道的数目的几何信息.探测数据分析领域包含许多其他的以快捷、精确、有效的方式来传达数据信息的新的、有效的技巧.计算机的使用使上述方法在应用数学的所有领域都变得切实可行.

使用紧凑的符号形式表示变量间关系的主要原因之一是用单纯的符号语句表达多个数或 n 数组的整个模式,叙述极其简炼.然而,把大量数据简化成符号规则的抽象过程,往往使潜在的使用者不易掌握这些数据中的信息.幸运的是,计算机却能轻松地显示并解释大量数据的集合.

支付	利息	本金	收付差额
			$5000.00
$445.00	$50.00	$395.00	$4605.00
$445.00	$46.05	$398.95	$4206.05
$445.00	$42.06	$402.94	$3803.11
$445.00	$38.03	$406.97	$3396.14
$445.00	$33.96	$411.04	$2985.10
$445.00	$29.85	$415.15	$2569.95
$445.00	$25.70	$419.30	$2150.65
$445.00	$21.51	$423.49	$1727.16
$445.00	$17.27	$427.73	$1299.43
$445.00	$12.99	$432.01	$867.43
$445.00	$8.67	$436.33	$431.10
$445.00	$4.31	$440.69	($9.59)

图 7 这张表格表示了一个5000美元的贷款,以 12%的利息偿还,每月应支付 445 美元的收付差额关系.

例如,差分方程 $y_{n+1} = 1.01y_n - 445$,其中 $y_0 = 5000$,描述了一个5000美元的贷款,以12%的利息偿还,每个月应支付
[76] 445美元的收付差额关系.对多数人来说,贷款的美元价值以及从支付到本金和利息的分布情况的实际模式通常是用一张简单的表来显示出来(图7).

当然,构造这张表格需要具备用符号形式表示量的关系的某种能力.这里使用的是如下形式的指数变化的递推公式:

支付	利息	本金	收付差额
			=500,000
=445	$=0.01*D_2$	$=A_3-B_3$	$=D_2-C_3$
$=A_3$	$=0.01*D_3$	$=A_4-B_4$	$=D_3-C_4$

计算机产生的代数式的数值表示,已证明是解决实际问题的很有用的工具.例如,在上例中我们使用的是逐次逼近法计算每月应支付的金额,并没有使用传统的常用公式.但是这些表示可以作为由算术的具体世界过渡到更抽象的代数(以及由"对于所有 x……"开始的命题)世界的桥梁.并且,当利用计算机曲线拟合工具找到适合数值数据的模式的符号规则时,有关表示的网络又还原回去了.

算　法

程序知识的第二个主要方面包括许多利用数学信息解决问题的技巧,通常称之为"算法".算法是一种"如何在有限步之内由输入的信息产生特殊的输出信息的经过精细定义的指令序列."

培养学生实施数学算法的技巧已成为中小学数学课的重点.最重要的算法是整数、普通分数和小数的加、减、乘、除运算以及代数学中关于多项式和有理表达式的相应运算.但是这些算法仅是众多的常用数学工具中最基本、最熟悉的那一部分.例如,欧几里得算法只是由两个整数求出最大公因数的几个常用

方法中的一种;埃拉托塞尼(Eratosthenes)发明的筛法仅是许多辨别出素数的算法中的一种;二次求根公式只是许多求解二次方程算法中的一种;还有许多算法可用来求解线性方程组和线性不等式组. [77]

算法的设计和应用显然是数学的中心.数学的威力就来自于它的抽象思想可以被用于解决表面上没有相似性的问题.用于商业和经济方面的算术及代数算法同用于物理学和工程方面的算法一样,同时,数学算法的这种独立于上下文的特性使它们易于计算机编程.这一事实包含着学校课程的主要东西:在中小学数学教学中具有基础作用并具有广泛应用性的任何具体算法一定会被编程,并在普通计算器和计算机软件中使用.廉价的计算器能够完成学校讲授的大部分关于数、符号及图象的算法.因此,现行技术严重破坏了那种认为学生必须发展熟练实施特殊算法的论点(因为他们在今后生活中需要这种技巧).

同时,对具体算法的学习已削弱了学校数学的重要性,而每个人进行数量工作需要理解算法的观点却变得更加重要了.[9,23,26]要想成为一名计算机算法语言的明智的使用者,那么理解算法的精确性、经济性和稳健性的属性以及在传统数学教学中不受青睐的那些基本概念(如归纳、递推)则是很有用的.简而言之,当计算器和计算机接替常规的运算程序后,数学的算法方面将以不同的姿态出现在人们面前.这种新情况需要人们重新考虑学校数学中数量学习的目的.

概念知识和程序知识

计算器和计算机已经明显地接替了数量信息表示与操作的常规内容,即程序知识的两个关键组成部分.把这些新条件转换为课堂教学的新目标,这一任务又提出了一个涉及概念知识与程序知识相互作用的关键性的心理学问题.许多数学教育工作者担心过多地使用计算器和计算机工具,而忽视对运算技巧的

培养,将会有碍于发展对概念的理解、解决问题的效率以及学习新的高等数学的能力.

数学理解力与数学技巧之间的相互作用问题已研究、探讨
[78] 过许多年,但在过去的十年中它又重新成为热门话题.对70多项调查研究[13]的最新数据分析表明:计算器的合理使用能够增强学生对概念的理解力、解决问题的能力以及学习数学的积极性,这对传统技巧的掌握并没有明显损害.对代数学的更有限的研究也得到了类似的结论.虽然关于这种主题已做了大量带有进展性的工作,但主要的报告结果来源于德马纳和莱泽尔(Demana and Leitzel).[8]

然而,在几乎所有的这些实验中,计算器或计算机都是被用做对传统的算术技巧及代数技巧的补充指导.如果做一个大胆尝试,让学生们主要依靠技术的帮助进行算术及符号运算,其结果将会怎样?这是一个开放的而且很重要的问题.可以肯定地说,关于概念知识与程序知识的适当考虑的争论将会持续一段时间.这肯定是学校数学中由技术的影响引出的中心议题.

数字感觉

学校数学的侧重点从传统的技巧转移到概念和解决问题,虽然对其风险与益处仍在争论不休,但在讨论培养学生完成各种数量推理的重要性方面,即培养所谓"数觉"方面,却达成了一致的意见.即使机器接替了大量计算,对机器的使用者来说,聪明地设计正确算法和解释结果仍然很重要.设计计算需要充分理解运算的意义,即与各种算术运算相对应的对象的行为特征.解释结果需要会判断机器输出的某个结果正确与否,如果有错,错误是来自数据输入、运算的选择或是机器的运行.(1989年2月出版的《算术教师》一书详细讨论了数觉的发展,特别是霍丹(Howden)的文章.[16])

验证数值结果的合理性需要两种基本技巧:首先是要对现

实世界的数量知识有广泛了解.例如,美国的人口是接近2000万、2亿,还是20亿?飞机的速度是接近100千米/时、1000千米/时,还是10000千米/时?什么数接近销售税、汽车贷款、饭店小费或大型垒球团体进球成绩的百分比呢?虽然这种信息并不是形式数学的内容,但是它对于判断算术应用于实际问题却是非常宝贵的背景知识.

计算上的数觉的第二个方面是能迅速估计出数量级的近似值.当电子计算机计算出一个准确结果时,重要的是用户要验证 [79]
其结果是否“在一个合理的范围内”.例如,通过迅速舍入和心算知道 $345+257+1254$ 近似为1850,85×2583 近似为200 000.这种技巧性的心算并不是通过大量地训练在脑子里实施传统算法的方法得出结果的,而是通过对位值的理解和一位数字运算的灵活应用得出结果的,这与传统的算术目的截然不同.由于过去10年对非正式算术及估算的高度重视,所以现在针对这个重要但长期被忽视的问题有了明确的目的、生动的教材及有效的教学方法.

符号感觉

几乎肯定存在一种可比较的非正式技巧,它需要有效地处理符号表达式和代数运算——培养学生的符号感觉——但是这方面的观念与教学材料发展得还不够完善.我们教授符号感觉的一组合理的目标至少包括下列基本主题:

●通过浏览代数表达式,就能粗略估计由数值表示或图象表示中所出现的模式的能力.例如,已知 $f(x)=50*2^x$,具有符号感觉的学生可以画出这个函数的草图,并且知道函数值为正且单调增加——当 x 为负数时,$f(x)$ 的值较小;当 x 为正数时,其值随 x 的增大而迅速增加.

●具有对如下形式的函数 $n, n^2, n^3, \cdots, n^k$ 的数值的大小进行有根据的比较的能力.这种技巧在数与符号感觉之间架起

了一座桥梁，它在判断数学的及信息处理任务（计算机科学的核心）中的算法的计算复杂性方面起着重要作用.

●浏览函数值表或图象，或是口头解释陈述的条件，确认一种表示适当模式的代数规则的可能的形式的能力. 例如，给出下列表格，具有符号感觉的学生能够预言，描述上面数据最好的函数形式可能是 $f(x)=mx+b$，其中 m 大约为 15，b 大约为 500：

	销售量 x	0	10	20	30	40	50
[80]	价格 $f(x)$	510	675	825	960	1100	1240

●检查代数运算，预测结果形式的能力；或者像算术估计那样，检查结果，然后判断运算过程是否正确的能力. 例如，学生几乎不假思考就应该知道一次多项式与二次多项式的积是三次多项式.

●确定几个等价式中哪一个最适合于回答特殊问题的能力. 例如，良好的符号感觉应该让学生了解，从多项式的因式分解形式中很容易得到它的零点，但计算其导数或积分很困难.

目前科研项目中有前途的工作说明了如何有效地使用数字和图象计算机工具，使学生树立对代数符号形式的直觉认识. 无疑，更一般的符号感觉的进展，仍然是在发展数量的概念知识和程序知识的新方法的道路上的一项重要研究任务.

数　　系

对许多学生来说，数学是一个由事实、程序及日常文字问题构成的巨大的、联系松散的集合. 不过，重要的是要记住数学概念的独特威力依赖于它的抽象意义，这种抽象意义又存在于每个具体问题的核心之中. 学习每个数学分支的基本原理应该包括对那些确定了它的概念与方法之间关系的深刻的结构原理予以关注. 对于数系，一些精干的思想就确定了每个数系的结构. 当你抛开具体材料，你就会发现很明显只要几个核心原理就能

概括数的所有代数和拓扑性质.这些原理可以被用于推导各种数系的所有具体事实并指导人们把形式系统与重要的数量问题相匹配.

在数系的历史发展中,其进步开始于自然数.经过许多世纪的扩张,增加了分数,然后是负数,最后产生了严格刻划的实数.从接近 20 世纪末的角度来看,可以把这些结构从上到下组织起来: [81]

- 实数系 R 是唯一的完备有序域;
- 有理数系 Q 是 R 的最小子域;
- 整数系 I 是 R 中包含乘法单位元的最小环;
- 自然数系 N 是 R 中包含乘法单位元且在加法下封闭的最小子集.

在简洁的形式(形式数学的特征)中,这四种陈述包括了许多关于结构的信息.它们隐含着每个数系都是具有两个二元运算和一个二元序关系的集合;运算满足交换律和结合律以及乘法对加法的分配律;每个数系都有一个加法单位元和一个乘法单位元;对于序关系相互作用的运算也类似.

但是,个别数系还有其他重要性质,这些性质从极小特征来看很不明显.在各种数系的代数和拓扑性质方面存在重大的差别,这些差别在纯粹及应用的角度有着特殊的兴趣.对数系差别的分析(从最简单的差别一直到最细微的差别)有助于培养学生对数和数系本质的洞察力.虽然学生们应该从学校数学中形成丰富的概念知识和程序知识,但是同样重要的是,他们应领悟那些为数系提供逻辑相关性的理论原理.

自然数和整数

自然数和整数的基本加法、乘法及序结构都是建立在几个简单而重要的原理基础上的.首先是有限归纳原理:

设 M 是包含 1 的自然数的集合.如果自然数 k 属于 M 时,

自然数 $k+1$ 也属于 M，那么，M 就包含所有的自然数.

这条性质隐含着自然数(以及它们的扩张——整数)形成了一个离散集，即在一个等距元素构成的序列中，任何一个整数 k 与它的后继数 $k+1$ 之间没有数.在一个离散步骤的序列所实现的任何过程中，它们可以为有序阶段提供一组下标.

有限归纳原理可用于定义同整数参数(如 x^n)有关的概念；
[82] 还可用于证明与所有自然数有关的命题.例如，为了证明 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ 对所有自然数 n 都成立，我们可以依靠有限归纳原理：

1. 设 M 是使方程成立的所有数构成的集合.因为 $1=1^2$，所以 $1\in M$.

2. 设自然数 $k\in M$，则有 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$，从而 $1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$.即 $k+1$ 也满足方程，从而 $k+1\in M$.

3. 利用有限归纳原理可知，M 包含所有自然数，从而公式对所有自然数 n 都成立.

数学归纳法是数学中普遍使用的证明方法，它对于像二项式定理这样的组合命题具有特殊作用.在以离散算法过程为研究核心的计算机科学中，归纳法作为一种证明技巧变得特殊重要.

虽然由归纳原理知道自然数和整数都有离散的序结构，但两者存在一个关键性的差别——整数存在加法逆运算，即：对每个整数 a，都存在整数 $-a$，使得 $a+(-a)=0$.这使得整数构成一个加法群，且对所有有序整数对，都可以定义减法运算；对于每个形如 $a+x=b$ 的方程在 I 中都有唯一解.

尽管 N 和 I 的加法结构极其正规且易于计算，但自然数和整数的乘法和除法却颇具有趣的挑战性.因为整数不存在乘法的逆运算(1 和 -1 除外)，所以除法运算在 N 和 I 中受到了限制，许多形如 $ax=b$ 的方程没有整数解.而且不存在简单的模

式用以说明乘法方程(或除法方程)的可解性.整数 24 可被 2,3,4,6,8 和 12 整除,但与之相邻的 23 却没有真因子,25 只有一个真因子.因此,由 24 个对象组成的集合可以 6 种不同的方式分解成元素个数相同的子集,但由 23 个对象组成的集合却不能以上述任何方式等分.

整数的乘法和除法由两条重要性质支配.算术基本定理保证每个正整数都可以用正确方法写成素因子的积.除法算法保证对任何正整数 a 和 b,都存在唯一的整数 q 和 r 使 $a=bq+r$,其中 $0\leqslant r\leqslant b$.这两个原理在数论、在更一般的形式中,或是在代数学中都有极其广泛的实践和理论意义. [83]

第一个——素因子分解定理——是数学中许多类似的结果之一,这一定理说明无论多么复杂的表达式,一旦被写成不可约因子积的形式,它都能被有效地研究.它的应用范围从简单地寻找最小公倍数或最大公约数开始到多项式的代数基本定理,即每个复系数的多项式都可以被写成线性因子积的形式(由此很容易得到多项式的零点).

当然,除法算法基本上是针对自然数和小数的长除法以及相应的代数多项式的因子定理这种熟悉过程的.它为发展同余类的算术提供了一个基本概念:对任何整数 a 和 b,$a\equiv b\pmod m$的充要条件是存在 k 使得 $a=mk+b$.由这种理论产生的有限循环群和域,它们作为离散现象的模型具有惊人的作用,其中包括在计算机科学、在密码术以及在商业和政府信息的传输与存储方面都有越来越重要的作用.

有 理 数

每个元素均能表示成两个整数 a 与 b 的商 a/b(b 不为 0)形式的最小数系,当然是有理数系 Q.数学家们称 Q 为一个域,域是用来描述与数的性质类似的其他结构.在 Q 中,每个非零元素都有乘法的逆元,每个形如 $rx+s=t$ 的线性方程,对有理

数 r, s 和 $t(r\neq 0)$ 均有唯一解. 这种代数威力是在损害简单性的条件下获得的.

有理数在标准顺序之下是一个稠密集——每两个有理数之间总存在第三个有理数,尤其是存在想多小就有多小的正有理数. 另外,对任何有理数 a 和 b,都存在 n 使得 $na > b$;这条性质使有理数集成为阿基米德(Archimedean)有序域. 虽然有理数的运算和序关系比整数要复杂得多,但 Q 的稠密性和阿基米德性质为测量的精确性奠定了基础,它还能保证任何有限的长度均能用任意加细的长度单位覆盖.

实　数

自然数、整数和有理数为形式系统提供了许多实际数量推
[84] 理任务的结构模型. 但是直到 2000 年以前才提出了这些数系解决不了的问题,知道了有理数并不是数系的最终形式. 当证明了不存在这样的有理数其平方是 2(或 3,或 5 或每个不能表示成平方形式的其他整数)的事实后,便暴露了有理数系的代数不完备性(图 8). 当用数度量几何图形时,毕达哥拉斯定理说明了有些线段不能用有理数度量. 在仅有有理坐标点的数直线上存在着“洞”(尽管洞不太大).

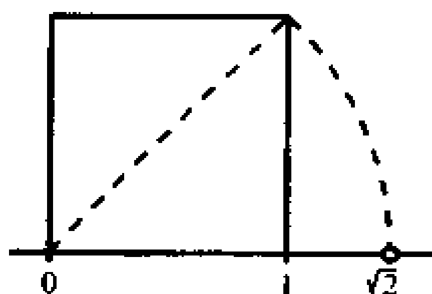


图 8　由于不存在等于 $\sqrt{2}$ 的有理数,所以在对应于边长为 1 的正方形对角线长度的有理数直线的位置上有个洞.

可以用多种形式把有理数扩张成能把这些洞填满的数集,



并且满足具体的代数和几何的需要. 例如,扩张集 $Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in Q\}$,在适当定义加法、乘法及逆运算的条件下,便成为一个有序域. 但是,能填满所有小洞的唯一完备的有序域是实数系 R. 它是个有序域,它的每个非空、上有界子集在 R 中有一个最小的上界. 为 R 制定了一种与众不同的作用的数系的关键定理是:每个这样完备的有序域一定与 R 同构.

实数好像只是填满了有理数直线上"无穷小"的洞,但是真正令人吃惊的是这两个数域之间有几个其他的差别. 首先,虽然每个有理数都是一个简单方程 $ax = b$(这里 a, b 为整数)的解,但是存在实超越数(如 e 和 π)就不是任何这样的多项式方程的解. 其次,有理数可以与自然数建立一一对应关系,因此有理数是无限可数的(这一惊人的结果直到本世纪初才被充分认识),但这对实数却不成立. 事实上,仅超越数就比代数数(有理代数方程的解)多得多. 虽然这个最后结果至少在 100 年以前就通过超限基数的巧妙推理得以证明,但是关于具体实数的性质仍存在一些敏感的、未解决的问题.

从另一种基本意义上讲,实数在数量的概念和方法的发展过程中迈出了重大的一步. 虽然自然数、整数及有理数都是数的无限集合,但是它们最初的用途是计数、排序以及比较离散对象 [85]
的有限集合. 实数为描述和解释无穷大或无穷小过程提供了必要的数学工具,它为极限及连续概念的严格化发展奠定了基础,它在运动与变化的分析过程中起到了桥梁作用.

复　数

从有理数到实数的扩张,使许多简单而重要的代数方程有解,但是仍有许多同样重要的代数方程不可解. 像 $x^2 + 1 = 0$ 或 $x^2 + x + 1 = 0$ 这样简单的多项式方程就没有实根. 一般说来,要求这些方程或所有多项式方程都有解的数系是复数系 C. 复数系是由实数系添加元素 i(其中 $i^2 = -1$, i 是方程 $x^2 + 1 = 0$ 的

根)所组成的最小的域. 值得注意的是,这个简单方程的推广研究为所有其他多项式方程提供解法,并为数学的性质和应用开辟了丰富的结构.

每个复数都可以表示为 $a+bi$ 的形式,其中 a,b 为实数. 因此,复数可由有序的实数对确定. 虽然实数与直线上的点可以一一对应,但是与二维平面上的点相对应的复数却不是线性有序的,由于这种简单序关系的丧失,使得复数的结构似乎比实数或实数子集的结构要复杂的多. 但它同时也带来了好处. 复数与平面上点的对应关系就建立了 C 的算术与代数之间以及平面上的几何图形和变换之间的密切联系(见图 9).

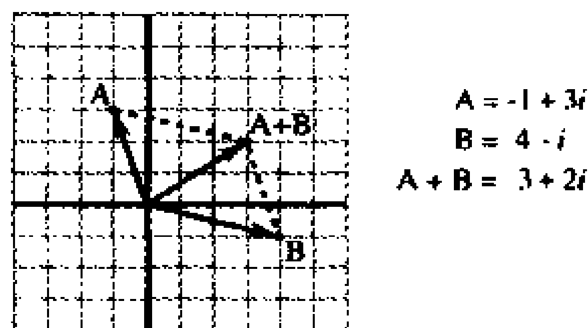


图 9　平面上的点与复数相对应,平面上向量的加法反映了复数的加法运算,乘法更复杂——所求向量的大小相乘,但角度相加.

复数包括一些最初被称为"虚数"的数,因为数学家们不承认负数的平方存在. 不过,虚数作为许多真实物理现象的模型
[86] (从交流电流到飞机翅膀上方的气流),它们是有用的. 它们还解决了纯数学中的代数基本问题:每个 n 次多项式恰有 n 个线性因子. 因此,每个 n 次多项式方程至少有一个且最多有 n 个不同的复根.

新 的 数 系

我们简要概括了人们较为熟悉的数系的基本原理. 自从 19 世纪后期的数学家们证明实数系是唯一完备的有序域,其次是

高斯(Gauss)和其他数学家对复数系代数封闭性的早期证明,这似乎使人们觉得数系的故事已经结束.实际上从某种意义上讲,对于新数系发展的精确陈述远远没有完成.

例如,从19世纪中叶矩阵代数学的发明开始,它就成为了分析复杂数据的一种重要的工具.矩阵是一种超数;在有些矩阵族中,矩阵的加法和乘法运算具有与实数的加法和乘法运算很相似的代数性质.最显著的例外是矩阵乘法不满足交换律——这条性质在线性代数中产生了许多重要的结论.此外,矩阵在刻划复杂数据,比如计算机日常处理的数据所组成的集合时就特别有用.

计算对于数量推理的应用,在实践与理论的重要性的不同方向都刺激了数学体系的发展.尽管计算机表面上看来有无穷的存储和瞬间的运算速度,但是它们不能用我们熟悉的数系如 I,Q 或 R 处理问题,而是用这些数系的有限逼近形式处理问题,其可靠性受到了仅用有限数的位置来表示数的计算机语言能力的限制.数系的这些"截断"的模型不服从数的传统的结构性质(如加法的结合律).因此,重要的是学生们应把他们的学习内容推广到实际数量工作所需要的这些有限系的结构性质方面.

类似于数的矩阵,它们不服从我们凭直觉认为是正确的结构性质,像这种数学体系的发现,在近代数学发展的道路上迈出了激动人心的一步.当代代数学起源于试图寻找解释各种不同数系的结构性质的理论.在近150年中,代数学通过对集合上各种运算和关系所固有的结构的研究,产生了一批丰富的抽象理 [87]
论.数学家们已经发现数系的推广研究为开发智力提供了场所,他们还发现这种抽象的数学领域常常具有深刻的实际应用价值.虽然群、环、域、格、布尔代数、半群和图灵(Turing)机起初是作为抽象结构引进的,但是现在它们已成为研究计算科学和信息科学的基本问题的常用工具.

本世纪中叶，数学受到开发数系的各种推广的兴趣的强烈影响，1973 年，G·伯克霍夫[3](Garrett Birkhoff)写道："到 1960 年大多数年轻数学家已经开始相信所有数学都是从集合和函数概念的公理化发展而来的."此外，他和麦克莱恩(MacLane)讲道："另一种'代数学'，即以映射、范畴和'普遍性'为核心概念组织成的纯代数学，它们将进一步向抽象方向发展."20 世纪 60 年代，改革的学校数学大纲就探讨了用类似的抽象结构概念来组织课程的可能性问题.

数学时尚的变化正如人工制品时尚的变化一样，今天，用抽象的公理化观点指导数学研究或教育似乎不再那么有前途了.尽管如此，仍有一些中心原理，它们位于数系和代数学的核心，它们把那些难以理解的具体事实和技巧有机地结合起来，这种结合不仅对学生有用，而且对实践的数学家也有用.因此，当课程计划者安排学校课程时，若能识别这些原理并在此基础上安排学校课程，这似乎是明智的.

应　　用

学校数学必须培养学生们对基本概念的理解力，熟练掌握运算技能以及逻辑推理能力.但是，学校数学的最终目的是，能否使学生们应用他们的知识解决重要的数量问题.解决问题的能力不仅是学校数学的最重要的目的，而且还是最困难的教育任务.

所有年纪的数学学生一听说"文字题"心里就发怵.有效地解决这类问题的关键的第一步是识别具体问题中与数系的概念在结构上相似的那些概念.解决这种任务的传统方法可分为两大类：实用主义的方法帮助学生处理各种经典(几乎是常规)问
[88] 题，其目的是为学生提供解决问题的战略指导——如用具体的图表组织关于时间/比率/距离问题的信息；用字典形式把关键的数量文字翻译成符号表示，等等.更有效的方法则是培养学生

使用具有普遍性的高水平的方法，即启发式教学法，它可用于解决许多不同领域中的问题.

公正地说，这两种方法在给学生提供自信的、可转化建模以及解决问题的技巧方面都不是明显行之有效的.（很遗憾）常用的"关键词"方法之所以失败，主要是因为普通语言的结构太灵活、丰富而且表达常常模棱两可，以致于不能翻译成可信赖的算法.另一方面，虽然学生们可以学会波利亚（Pólya）等人提出的具有普遍性的、高水平的启发式教学法，但是现在人们已经发现培养学生熟练掌握这种带有认识论的操作思想，利用启发式教学法有效地解决具体问题，决非易事.最近出现的关于解决问题的方法方面的带有认识论观点的工作进展很有前途，不过目前还没有实质性的结果.[30]

建　　模

在人们继续寻找解决问题的有效的、新的教学方法的同时，出现了一个同等重要的变化，那就是人们开始思考数量问题本性的问题.在当代数学的许多应用领域，人们很少考虑解决特殊的明确确定的问题，而是把注意力集中在构造和分析问题提出的数学模型上.学校数学中的经典数量问题通常包括数量信息和一个能通过数值计算或求解方程得到答案的简单问题.校外所遇到的实际问题往往要么是缺少条件，要么是有许多与问题无关的信息以及许多不太明确的问题.

在数学建模方法中，第一步是识别相关的变量；第二步是利用适当的形式语言，描述变量之间的因果关系；然后根据输入或输出的数值或建模关系的整体性质提出特殊的问题.最后，通过数值、图象或符号方法，利用计算机工具解答这些问题.

测　　量

测量是最常用的处理数值变量的方法.因此，测量的理论与

[89] 技巧在数量技能中起着重要作用.像数系的算术一样,测量在感觉上好像是学校数学常规教学内容的某一方面——几乎不需要思考.然而,测量作为数学与它的应用之间相互作用的关键性部分,在课程教学方面并不十分成功.

在学校数学中,典型的测量任务是求几何图形的长度、面积和体积.公正地说,大多数学生学习测量,先是给出标准的长度单位,然后以标准长度单位为基础,利用公式计算周长、面积和体积.面积等于[长×宽]或$\left[\frac{1}{2}\times$底$\times$高$\right]$或$[\pi\times r^2]$;体积等于[长×宽×高]或$[\pi\times r^2\times h]$,等等.大多数测量问题就转化成了利用公式手算的算术练习.

受这种形式的测量方法影响的学生,普遍形成了对长度、面积和体积局限性的、极不灵活的观念.他们在估算时常把求面积与求周长相混淆,这是令人沮丧的常见的错误.有些学生常常不假思考,也不管问题是怎样提出的,同用下列"法则":只要长方形相邻两边的长度已知,就把它们相乘;而当长方形每条边各附一数时,就把它们相加.

强调公式计算也不利于学生们明智地处理实际测量的近似性质、测量的组合中误差的累计结果,以及许多实际应用中出现的不规则图形的推广或演算过程中出现的基本曲线和基本曲面.此外,几乎没有学生认识到或充分利用构成测量的应用基础的结构相似性.

每个测量过程的中心是建立数与对象之间的映射,这个映射将度量1与某些指定的单位相对应,那么,其他对象就用单位的多少倍来度量.单位元素的选取是任意的,但是一旦选定,所有其他对象就以它为测量标准.因此,每个测量均由单位和一个数组成——这个数(标准单位的整数倍或是多少份)需要准确地反映所测量的对象.理解这个原理(作为许多重要测量方法的一般性质)的数学学生就获得了对于实际问题与数量模型之间的

关系深刻的认识.

测量的单位及其覆盖性质相当清楚地说明了每个特殊测量所表示的东西;而且,测量单位的附件可以被用于指导正式推出科学原理.在许多科学中数量推理通常是被一种称之为“因次分 [90]
析”的数值代数所指导.在这种方法中,每个算术运算不仅靠数还要靠标准单位来完成.如果最终结果是一个数(其单位适合这个问题),那么由因次分析可知,上述运算过程是恰当的.虽然在数学中人们对测量中的单位及数的重视程度与在科学中的重视程度不同,但是它在那些热衷于帮助学生理解形式数学与它的应用之间的联系的人们中间有强大的支持者.[18,21,31]

在物质世界中,测量数量概念的理论与实践在数学及其教学中具有很长的历史.然而,正像许多经典数学方法被推广、应用于新领域一样,测量被扩大到了社会科学的整个领域,并具有重要的应用.虽然把数与对象或事件相对应这一基本思想是一样的,但是这些新的测量所服从的结构性质往往很不同于长度、面积和体积的测量.

政治科学家和社会学家在社会问题中设计了许多衡量权力与影响的方法;经济学家在决策中设计了用数量表示选择权的成本和收益的测量方法;心理学家和教育家采用多种测量方法描述个人的能力和成就;统计学家可以测量许多不同种类的随机变量之间可能的因果关系.每种情况都是利用数、运算和关系来为有关重要的结构性质建模.有时经典原理和概念可以直接使用,但是,在社会科学和人文科学中,有效的数量推理需要对对应新情况灵活地构造新的反应的数有所了解,这种推理变得越来越普通.

目　　的

毫无疑问,学校数学的最重要的目的是培养学生利用数量信息合理地思考的能力.给经验的数量方面建模的数学的概念、

技巧和原理都是靠数系、代数及测量(这些一直是学校数学课程的核心)的结构提供的.然而,随着表示和操作数量信息的强有力的工具(电子计算器和计算机)的出现,在这些学科中向传统的教学重点提出了挑战.若是占用大量课堂时间训练学生算术
〔91〕和代数算法的能力,这将没有意义,因为廉价且方便的计算器能迅速、准确地完成这些运算.计算机这个强有力的计算工具的使用,使得数量推理应用的范围显著的增加.学校数学必须训练学生灵活地、有创造性地使用数、代数和测量的知识,不应该只停留在一些常规的、可预见的计算问题上.

在当今世界,为了使学生迎接数量推理的挑战,学校数学必须训练学生们的如下能力:

- 正确理解数系的基本性质以及这些数系与它们所反映的现实对象之间的匹配关系;
- 用符号、语言和图象表示描述和解释数量结构;
- 用心算、笔算、计算器或计算机等各种适当的方法完成涉及算术和代数思想的精确计算和近似计算;
- 应用数值的和代数的技巧求解常规的和有开创性的数量问题.

能够培养这些一般技巧和理解学校教学的经验,在开发有趣和重要的数量问题的机会方面和在阐明具体问题中所体现的数学思想的结构方面必定是十分丰富的.

参考文献和推荐读物

1. American Association for the Advancement of Science. *Science for All Americans*. Washington, DC: American Association for the Advancement of Science, 1989.
2. Baumgart, John K. "The history of algebra." In Hallerberg, Arthur E. (Ed.): *Historical Topics for the Mathematics Classroom: Thirty-first Yearbook of NCTM*. Washington, DC: Na-

tional Council of Teachers of Mathematics, 1969, 232 – 260.

3. Birkhoff, Garrett. "Current trends in algebra." *American Mathematical Monthly*, 80 (1973), 760 – 782.
4. Brainerd, Charles J. *The Origins of the Number Concept*. New York, NY: Praeger, 1979.
5. Dantzig, Tobias. *Number: The Language of Science, Fourth Edition*. New York, NY: Macmillan, 1959.
6. Davis, Harold T. "The history of computation." In Hallerberg, Arthur E. (Ed.): *Historical Topics for the Mathematics Classroom: Thirty-first Yearbook of NCTM*. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1969, 87 – 117.
7. Davis, Philip. *The Lore of Large Numbers*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1961. [92]
8. Demana, Frank and Leitzel, Joan. "Establishing fundamental concepts through numerical problem solving." In Coxford, Arthur F. and Shulte, Albert P. (Eds.): *The Ideas of Algebra, K-12: 1988 Yearbook of the NCTM*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988.
9. Fey, James T. *Computing and Mathematics: The Impact on Secondary School Curricula*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1984.
10. Gardner, Martin. *The Magic Numbers of Dr. Matrix*. Buffalo, NY: Prometheus Books, 1985.
11. Ginsburg, Herbert. *Children's Arithmetic: The Learning Process*. New York, NY: D. Van Nostrand, 1977.
12. Gundlach, Bernard H. "The history of numbers and numerals." In Hallerberg, Arthur E. (Ed.): *Historical Topics for the Mathematics Classroom: Thirty-first Yearbook of the*

NCTM. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1969, 18 – 36.

13. Hembree, Ray and Dessart, Donald. "Effects of hand-held calculators in precollege mathematics education: A meta-analysis." *Journal for Research in Mathematics Education*, 17 (1986), 83 – 89.
14. Hiebert, James (Ed.). *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1986.
15. Hiebert, James and Behr, Merlyn (Eds.). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988.
16. Howden, Hilde. "Teaching number sense." *Arithmetic Teacher*, 36 (1989), 6 – 11.
17. Kamii, Constance K. *Young Children Reinvent Arithmetic*. New York, NY: Teachers College Press, 1985.
18. Kaput, James. "Quantity structure of algebra word problems: A preliminary analysis." In Lappan, Glenda and Even, Ruhama (Eds.): *Proceedings of the Eighth Annual Meeting of the PME-NA*, 1986, 114 – 120.
19. Kaput, James. "Representation systems and mathematics." In Janvier, Claude (Ed.): *Problems of Representation in the Learning and Teaching of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1987, 19 – 26.
20. Kaput, James and Sims-Knight, Judith. "Errors in translations to algebraic equations: Roots and implications." *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 5 (1983), 63 – 78.
21. Kastner, Bernice. "Number sense: The role of measurement applications." *Arithmetic Teacher*, 36 (1989), 40 – 46.

22. Kenelly, John W. *The Use of Calculators in the Standardized Testing of Mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1989.

23. Knuth, Donald E. "Algorithmic thinking and mathematical thinking." *American Mathematical Monthly*, 92 (1985), 170 – 181.

24. Lesh, Richard (Ed.). *Number and Measurement: Papers from a Research Workshop*. Columbus, OH: ERIC/SMEAC, 1975.

25. Maor, Eli. *To Infinity and Beyond: A Cultural History of the Infinite*. Boston, MA: Birkhauser, 1987.

26. Maurer, Stephen B. "Two meanings of algorithmic mathematics." *The Mathematics Teacher*, 77 (1984), 430 – 435.

27. Myhill, John. "What is a real number?" *American Mathematical Monthly*, 79 (1972), 748 – 754.

28. Osborne, Alan R. "The mathematical and psychological foundations of measure." In Lesh, Richard (Ed.): *Number and Measurement: Papers from a Research Workshop*. Columbus, OH: ERIC/SMEAC, 1975, 19 – 45. [93]

29. Pollak, Henry O. (Ed.). "The mathematical sciences curriculum K-12: What is still fundamental and what is not." Washington, DC: Conference Board of the Mathematical Sciences, 1982.

30. Schoenfeld, Alan. *Problem Solving in the Mathematics Curriculum: A Report, Recommendations, and an Annotated Bibliography*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1983.

31. Schwartz, Judah. "Semantic aspects of quantity." Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, 1976 (unpub-

lished manuscript).

32. Thomson, Sir William (Lord Kelvin). *Popular Lectures and Addresses*. New York, NY: Macmillan and Co., 1891, 1894.

33. Usiskin, Zal and Bell, Max. *Applying Arithmetic: A Handbook of Applications of Arithmetic*. Chicago, IL: Department of Education, University of Chicago, 1983.

34. Whitney, Hassler. "The mathematics of physical quantities, Part I: Mathematical models for measurement." *American Mathematical Monthly*, 75 (1968), 115 – 138.

35. Whitney, Hassler. "The mathematics of physical quantities, Part II: Quantity structures and dimensional analysis." *American*
[94] *can Mathematical Monthly*, 75 (1968), 227 – 256.

（邓明立，魏利，杨春宏）

不确定性

大卫·S·莫尔

引　　言

“不确定性”是打算用来提出两个相关的主题：数据和机遇．这两个主题都不是数学之内的主题；然而，它们都是可成为数学研究对象的现象．大致来讲，统计和概率分别是研究数据和机遇的数学领域．

最近对于学校课程提出的建议一致认为：统计和概率比过去应该占有远为突出的地位．[12,14]不过，因为这些建议往往强调数据分析，结果容易把统计特别看成一套特殊的技艺(或者看成甚至于是一个魔法袋)．我们这篇论文的任务不是促使大家在学校教育中注意数据和概率，而是发展这条数学思想的线索，阐明整个的题材和战略而使得每个个别的题目都能找到它们自然的位置．

任何打算对教学产生影响的讨论都应该反映教师和学生的经验，任何课程改革的建议如果脱离开这些经验就会是空想的希望，必定在实践中遭到失败．学校中教统计并非空想，当前正在试验的新材料经实践证明是有用的，它帮助学生发展数的概念和技巧，而不是取代它．然而，我们的热情往往使我们容易忽略实际问题，促使我们教的材料在数量或水平上脱离实际，重要 [95]

的是，在数学教学中使用数据和机遇时，不仅要对它的好处，而且也要对其中的困难以及潜在的错误步骤引起注意．我写这篇论文时，我试图只在实践的方向上有差错而不在空想的方向上犯错误．

数　　据

教统计的重要性一部分肯定是由于我们认识到，在每天日常生活中以及许多行业中，处理数据所起的作用．现在越来越常见的是，去教一些直接有用的数学科目，而不是去选一些只是为了引导以后学的数学科目．统计学就是这种直接有用的数学科目．

新闻报导当前的国家经济和社会统计，民意测验，医学的数据（包括从传染病研究和临床试验中得到的）以及商业和财政金融的数据．许多公民必须在工作中更详细地处理数据．农民和农业企业都利用谷物收成预报以及农业大田试验的结果．工程师关心产品性能、质量和可靠性，制造工人被越来越多地要求记录数据以及操作数据来进行过程控制．卫生科学要为成本和疗效的数据而斗争，同时还要同医学研究的数据斗争．商业在各种各样的数据之上运行：成本、利润、销售计划、市场调研等等．我们有许多非做不可的实际理由来学习统计学．

这些例子提醒我们，数据不仅仅是数，而且是有上下文的数．数 10.3 在没有上下文的情况下就不具有任何信息；而一个婴儿的出生重量为 10.3 磅使我们能对孩子的健康加以评述．这就是数据加上我们对其上下文的知识使得我们能够理解和解释，而不仅是单纯进行算术运算．

因此在学校中教统计学有强烈的教学的和实践的理由．统计学把有意义的计算活动与选择方法和解释结果的判定实践结合起来．开始教授初级统计学主要不是为了自身的目的，而是因为它是一个有效方法来发展定量理解力，并把算术和作图应用

于解决问题.

教师如果能理解数据是有上下文的数,那么他在给学生提出问题时,总可以提出适当的上下文.计算五个数的平均值是一道算术习题,而不是统计习题.计算通俗音乐磁带在五个零售点的平均价格则是统计问题,特别是结合对价格的分布的考虑以及同其他类型音乐磁带价格进行比较时,则更是统计问题. [96]

重要的是对数据的研究在实用上和教育上的优点不应该屈从于只是强调教运算过程.教师以及教材的编撰者必须发挥想象力以提供对学生有意义的数据.对于高年级学生,可以利用从其他学科(例如科学)得到的数据,虽然学生还不太能把这种数据同日常生活联系起来.对于低年级学生,最好的数据是学生们自己获得的.学生们可用各种方法得到数据,例如向班里提问(在你家里有多少个孩子?)或者让每个学生去测量、计数或估计某个量.

在设计教学过程中,还要求做进一步的努力来提供出不单是数目字的数据.好的数据不只是具有动员学生的吸引人的特性,这对于统计的本性是必不可少的.然而重要的是还需要努力产生出数据而不把教过或学过的数学思想掩盖掉.

特别是,在学校以外对于重要的问题力图获取好的数据乍看起来不难,而实际上总是非常非常困难.教师为了获取数据,既花费时间又搞得手忙脚乱的不愉快的经验,往往使他们不愿意教统计学.与获取数据活动相伴的困难形成有效改革的几个潜在阻碍中的头一个.教材必须提供有趣的数据以及对学生获得数据的实用的、经过检验的建议.随着时间的过去,教师就能够收集和分享对教师和学校都适用的数据组.计算机是储存和分享数据的理想工具.

机　　遇

某些现象的结果是可以预言的:把一个硬币由一定高度丢

下来，它落地所需的时间，从基础的物理学就可以预言.除去相当小的误差之外，结果是确定的.可另一方面，假如我们掷一枚硬币，我们并不能预言它正面还是反面朝上，结果是不确定的.然而，投掷硬币并不是偶然事件，假如我们进行大量投掷，正面朝上的比例就非常接近一半.这种长期的规律性不只是理论上的推断，而且是一个观察到的事实：

● 法国博物学家布丰(Buffon, 1707 – 1788)曾投掷硬币 4040 次，结果 2048 次正面朝上，正面朝上的比例为 2048/4040 = 0.5069.

● 大约 1900 年左右，英国统计学家卡尔·皮尔逊(Karl Pearson)竭尽全力把一个硬币投掷 24000 次，结果 12012 次正面朝
[97] 上，正面朝上的比例为 0.5005.

● 英国数学家约翰·凯尔里奇(John Kerrich)，他在第二次世界大战期间被德国人囚禁，他投掷硬币 10000 次，结果：正面朝上 5067 次，比例为 0.5067.

我们把这种现象称为随机的，如果其个别结果不确定，但是多次重复之后，结果有规则的模式."随机的"不是"偶然的"同义词，而是描述一种不同于确定性的秩序，这种确定性通常同科学和数学联系在一起，而概率则是描述随机性的数学分支.

孩子在校内外的经验接触到随机性要比接触数据还少.例如，学生们上中学之前，碰不到那种出现随机行为的科学领域(例如遗传学和量子理论)，而上中学以后，也只有当他们选修实实在在的科学课程才能碰到.自然，不确定性在全部人类经验中普遍存在；但不确定性中的秩序在偶然的背景中是很难观察到的.即使公共抽彩，虽然许多学生都很熟悉，但对随机性中的有序方面没有什么经验，因为抽彩只是强调不大可能得到的大奖.这些有广泛公众的机遇博弈都使用真正实际的随机化，但是似乎又使人们偶然致富.

心理学家已经证明，我们对机遇的直觉同描述真实的随机

行为的概率规律互相矛盾.这种不正确的理解很难通过正式教育来纠正.力图在没有适当的直觉的准备的情况下来教概率和统计推断是在学校课程中引进数据和机遇的第二个隐藏的主要困难.

甚至在学院水平,许多学生也不能理解概率和推断,因为许多误解不能通过学习形式规则而消除.概率论与学生们的世界观之间的冲突至少部分是由于学生与随机性的接触极为有限.因此,我们在数学课程早期就应该提供对随机行为的经验以为他们学习机遇做准备.幸运的是,对数据的学习为这种经验提供了一个自然的背景.教导不确定性的一个重要原则就是数据分析要优先于形式的概率和推断.

人工的机遇装置(硬币、骰子、轮盘)可以用来在教室当中获得数据,其目的是应用数据分析技术来发现这些装置的有序本性.不确定性还出现在机遇装置以外来源的数据.对同一量的反复测量(例如由几位学生来做)产生变动的结果.高度、刻度读数或一组人的收入都出现自然的变化.令人惊奇的或许是,描述细 [98]
心的测量或者许多个人的数据中的变动的模式,同样可以用描述机遇装置的结果的数学.

对数据变动的经验是走向认识统计与概率之间关系的第一步.在以后阶段,统计设计中由计划周全的随机化产生数据的作用加强这种联系.最后,正式统计推断利用概率的语言和事实来表示我们能由数据得出的结论的可信度.

虽然在日常生活中理解随机性的用处,比起讨论数据的必要性来不那么明显,但是还是有关于机遇的教学的实际论述.教导概率的目标之一是帮助学生了解,正是机遇的变化而不是确定论的因果关系能够解释世界的许多方面.

假设一位篮球队员在一个长赛季中罚球有70%罚中.在一次比赛结束前,她有五次罚球但只投中两个.球迷说

> “神经紧张”，但这种因果性解释不一定正确．一名队员每次投球0.7概率投中，仍有大约0.16的概率使得互投三球或三球以上没有投中．这样表现可容易地简单解释为来自机遇变化．

对于概率的某种了解能够使我们考虑机遇的作用，而不是每一次去寻求特殊的、往往是虚伪的原因．

计算器和计算机

随着快速的、易于运用的计算技术的来临对于整个数学的冲击，它也使统计学的实践产生革命化．这次革命的明显效果是对于较大组数据更为复杂的分析现在变得非常容易．但是，计算技术革命对于统计实践的本性也带来变化．过去统计学家为了从数据得出结论，都根据特殊的数学模型进行直接的分析，但计算上冗长繁复．对统计的教学也相应地强调学习进行冗长的计算．

现在，标准的统计分析是模型的数据之间的一场对话．数据可以批判甚至证伪原来的模型．有助于这个过程的诊断方法是统计学研究的一个主要领域．所有方法都用到高强度计算，最广
[99] 泛采用的方法都大量运用图象显示．此外，一度强加在手算的限制去除之后，就导致甚至从十分小的数据集中进行推断的新方法．[3]统计学的这种变化特性马上就反映在教学方式上，特别是越来越强调图象方法以及非正规的数据分析．

计算机的影响还导致数学家之间的深刻反思，其中有些人对于证明的本性提出置疑，因为这些证明是基于计算机对于所有可能情形的搜索，而这种情形数目太多难以由人来仔细检查．在更初级的水平上，老师和父母都要问是否过早使用计算器会妨碍学生对数和算术运算的理解．可另一方面，统计学家却把计算器和计算机作为一种解放的力量而加以欢迎．用手计算平方

并不增进理解;它只是使心灵麻木.在这种情况下,统计学家就很自然在教导各种水平的数据时,鼓励学生使用计算器和计算机.

学院的统计学教学已经广泛地使用计算器,并且在计算机上广泛使用统计软件.(由于技术连续进步,自然从计算器到计算机之间是连续过渡的而不是中间脱节.)下面是基础统计学的一个典型的练习,我们从容易计算的角度重新加以考虑.

> 图 1 表示数据的散点,这些数据表示一组小孩中每一个孩子讲第一个字的年龄以及他们后来智力测验的得分.讲第一个字的年龄是否会帮助我们预言后来的测验得分?

过去一度要求学生画出数据,然后计算最小平方回归线(图 1 中的实线)以及它们的相关系数 $r = -0.640$.可能会为了节省

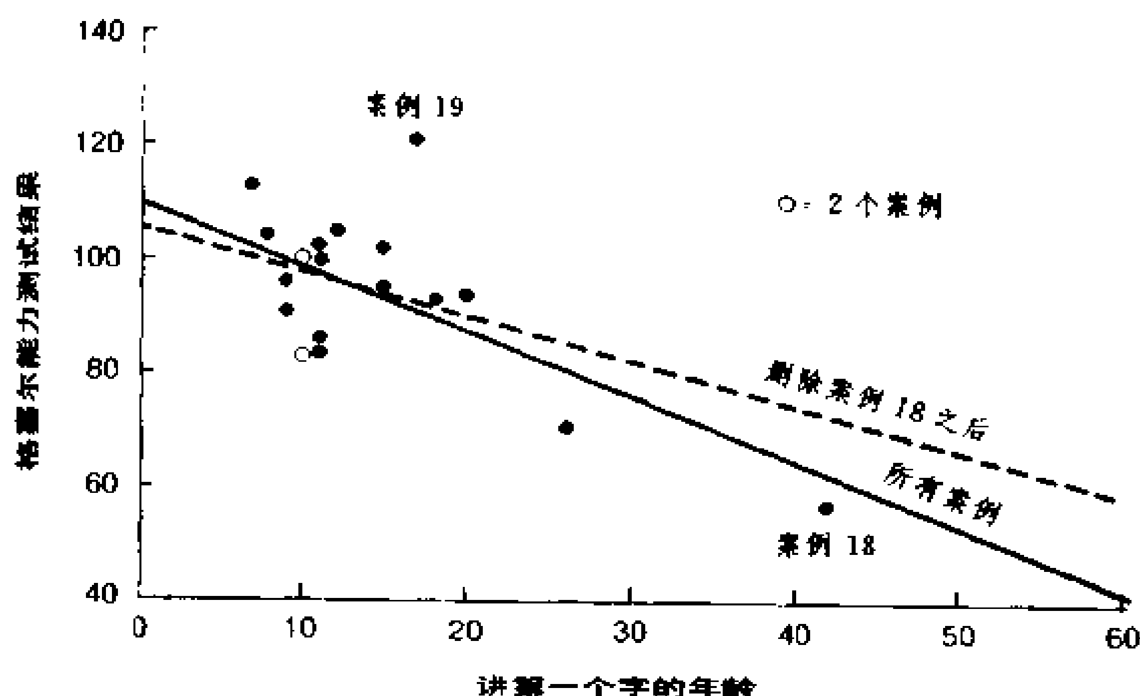


图 1　21个孩子的开始说话的年龄(横轴刻度)与格塞尔(Gesell)能力测试即长大后的能力倾向测验的结果.案例 18 特别有影响,也就是去掉它会显著地移动回归线并显著改变数值测量例如相关的值.

时间而不要求绘图.多数学生用简单计算器至少得用 15 分钟来做这个练习,只有虐待狂才会要求更多.

显然数据中包含两个远离中心的点,在图中标记为案例 18 和案例 19,这些案例如何影响回归分析呢?有一种在各种计算机上普遍可应用的互动软件包能马上提供答案,要是计算机有图形显示能力的话,它还能直观地显示出来.案例 19,虽然远离回归线,对于回归线的位置或者相关系数值 r 并没有很大影响.案例 18 则恰巧相反,它特别有影响.要是去掉这个点,回归线就移向图中虚线位置,而且相关值减少到 $r=-0.335$,大约原先值的一半.因此,要是去掉案例 18,由说第一个字的年龄来预言
[100] 后来的能力得分的证据就要被大大削弱.(这些数据在莫尔(Moore)[13]中例 3.10 和 3.14 详细地讨论,本文中大多数数字都引自该教本.)

计算的自动化使我们能够保持精力去讨论数据.自然,讨论是采取集体解决问题的形式:"有什么不平常的事?远离中心的点,它们有多重要?让我们不考虑它们再一次进行分析."于是,我们被鼓励去搜寻关于数据上下文的额外信息.例如,去问案例 18 的孩子是不是说话太迟以至于在研究正常儿童发育时应予排除在外.这个例子还引导我们问:什么使得观测有影响,这个问题导致统计学中的新主题.

自动计算使得学生能集中于解决问题的其他方面:计划一个适当的分析,在其上下文中解释所得的结果,进一步问由习题提示的新的数学问题.但是,的确自动计算能够掩盖我们所进行工作的本质,而且妨碍我们判断这项工作是否适用于这个特殊的问题.学生们往往太相信,计算机就像在电影《星球大战》中那样,单纯地告诉我们真实情况.

在抽样的课堂练习中,[18]要求学生记下一大堆 M&M 牌糖果
[101] 样品的颜色,并用计算机由同样颜色的均匀分布所得到样品的结果加以比较.糖果颜色的分布远非均匀.这个练习的目的就是

通过比较来证明：糖果颜色事实上并不是均匀分布的．然而"……有的学生单纯地相信，计算机模型是正确的，因为它是在计算机上做的．甚至于他们自己考虑人口模型时也是如此．"

对计算机的有效性过于乐观是统计学教学的一个主要的潜在危险．没有充分的计划就把计算器和计算机引入到课程当中也同样危险．重要的是循序渐进地使用计算器和计算机，只要学生们用它们得到好处而不是盲目地相信这个"魔盒"．

心算和估计对检验自动计算是极其重要的．它们需要基本的算术技巧．四功能计算器对运算的顺序保持着控制，运算必须依次进行，自动化的只是算法．例如为了用计算器进行长除法，孩子必须懂得除数和被除数的区别．为了用基本计算器计算平均值 $\bar{x}$，孩子必须知道求平均值的方法是先把观测量加在一起，然后用观测次数去除．这样，孩子们一旦理解了运算，就可以开始在他们学习数据时使用计算器．其后，我们可以使用由键入的数据直接计算样本平均值和标准离差的计算器而不必再管它已经掌握的常规算法．

在更高级的水平上，有些矩形图应该先用手绘出然后才能转向有吸引力的软件．它能从原始数据直接分组并做出矩形图来．更重要的或许是由实际机遇装置和物理模拟所获得的经验，例如在进行计算机模拟之前，应该有由一盒子中摸出彩色珠子的经验．"微观世界"不一定同现实有什么关系．然而学生们总是倾向于相信计算机表现现实．从物理的到数字的细致的逐步转变是非常重要的．当计算器和计算机已是正常的教室环境的一部分，它必须要使用而不是留给特殊科目或高年级时，逐步学会使用它就最容易．

从数据到推断

我们有几个组织原则能够帮助我们看到数据和机遇作为一个紧密的整体的数学研究．其中一个原则是：思想进程是从数据

分析到数据产生到概率到推断.本文也按照这同样的步骤,组织
[102] 我们的讨论:

- 数据分析,它包括组织、描述和概括数据.
- 数据产生,通常对某个较大总体回答一些特殊的问题.
- 概率,随机性的数学描述.
- 推断,由数据得出结论.

这种主题的进程即表示这领域的逻辑发展,也表示概念的困难程度.因此,它给出统计学的题材出现在学校课程中的一般顺序.当然,后面三个标题在数据分析的论述一开始也非正式的出现.在最低年级也可以开始有产生数据的经验,特别是随机性后果的经验.同样,从初级阶段,就应该鼓励学生由数据得出非正式的结论.

这个框架的主要缺点是:它并不强调,概率不仅是统计的一部分,概率本身也很重要.只要学生懂得分数,无论是概率的概念,还是概率基本的数学事实,都可以在小学引进.但是,概率在统计思想的进程中有其自然的位置.产生数据的统计设计可以刻划为,在随机抽样和随机化的比较实验中审慎地运用概率.这就给我们提供机会,使学生对随机性产生更多的经验,并且进一步在数值概括(例如几个观测值的平均值)中进而学习随机变差.在具体的随机选取和模拟中都可运用概率.

另一方面,正式的统计推断要求对概率有某种理解.因此,把概率一节放在数据产生那节和推断那节之间就比较合情合理.因为学生在学习概率和基于概率的推断时会遭遇很大的概念困难,在中学里对这些主题进行正式数学讨论或许更应该是在选修课程而不是在核心课程中.

数 据 分 析

数据分析是一种新生的描述统计学,它带来新方法,更强调图形学以及来自约翰·塔基(John Tukey)的谐调一致的哲学.

(塔基 Tukey 的《全集》的第 3,4 卷包含他在这个领域的著作.[8] 一位评论者推荐第 4 卷中的第 12 篇论文为一个好的起点.)数据分析的本质是"让数据说话",方法是寻找数据中的模式,而不是一开始就考虑数据是否代表某个更大的领域. [103]

检查数据常常揭示出没有料到的特征.如果数据产生是为了回答一个特殊的问题(这是证明诸如置信区间和显著性检定之类的传统方法合理的基础),这种不同寻常的特征可能引导我们重新考虑我们所制定的分析计划.因此在正确的统计实践中,细致的数据分析总是先于正式的推断.

在另外的情形下,我们心中并没有特殊的问题,并且打算让数据提出我们能通过进一步研究试图加以证实的结论.这时我们就要谈到"探查数据分析",就像探险者进入未知地域一样.

对数据分析最著名的贡献是提出展示数据的新方法,例如干形图标绘法和矩形图标绘法(或者干-叶标绘法和矩形-触须图标绘法,假如你喜欢长的名词).从这些例子很容易把数据分析看成是一组巧妙的工具而丢掉它的组织原则.不论是复杂数据集的分析,还是对数据的教学顺序,下面三个原则都可以提供有用的引导:

1. 从简单过渡到复杂,从考查单一变量到两个变量之间关系到多个变量之间的联系.
2. 在考查数据时,首先寻找一个整体模式,然后寻找同该模式的显著的偏差.
3. 从图形显示过渡到对数据的特殊方面进行数值测量,到整体模式的紧凑的数学模型.

数 据 显 示

第一条和第三条原则提出学习数据要从显示单一变量的分布开始.这类数据大都或者是计数出来的(这就是为什么像颜色之类的定性变量变成为数值变量),或者有单位的测量.数据显

示的特殊方法可以平行于早期定量概念的发展提出来."一袋M&M牌糖果,每种颜色有多少?"可以通过数数定下来,并通过一堆有颜色的框图来显示.

后来二位数的干形图能够强化整数中十位数和个位数的区别.二位数的数据干形图把十位数列成"干"而记录观测量时把个位当成叶子放在适当的干上.例如,下面就是一个干形图,表示大个儿鲁斯(Babe Ruth)每年在扬基队比赛中打出的本垒打
[104] 的数目.

2	25
3	45
4	1166679
5	449
6	0

再往后我们就用矩形图.为了构造数据多于几个值的矩形图,我们需要理解"介于中间"的意义,把数编组的能力以及在图形中设定并使用标度的技巧.

随着数据中的数变得复杂,在干形图和矩形图上在已知变动中进行选取需要更多的判断.例如,几位数的干形图常常需要截尾或四舍五入.把几个多位数分组做成矩形图要求对十位数的顺序有一个清楚的了解.小心地计划很重要,这是为了避免给学生留的作业超出他们的计数能力.但是初级班中的数据分析会使学生在现有的数学课程中学到的重要概念和技能通过有趣的应用而得到巩固和加强.

当我们造出数据的展示,我们必须解释它并把我们的理解同其他人交流.孩子们自然并不能"读"数据,正像他们不能生下来就能读字一样.必须教他们观察数据的战略以及应该觉察到的个别特征.在第二个原则中已经表示我们的战略:先寻找模式,然后寻找偏差.当我们通过第一个原则所经过的阶段时,个别的特征就变了.下面例子表示在单变量情形下的这个过程.

1961 年扬基队外垒手罗杰·马利斯(Maris)打破大个子鲁斯的一个赛季打出 60 个全垒打的记录.下面是扬基队的历年比赛中的鲁斯(左方)和马利斯每年击出的全垒打的背对背的比较图表:

鲁斯		马利斯
	0	8
	1	346
52	2	368
54	3	39
976611	4	
944	5	
0	6	1

鲁斯分布的整体形状是大致对称的,中心大约是 46 个全垒打,也就是有一半年份超过 46 个,一半年份不到 46 个,与整体模式没有很大的偏差.鲁斯在 1927 年著名的 60 个全垒打和其他值相比并不特别突出,它是大个子的最佳成就,但从他整个生涯来看也不是特别不平常的. [105]

与此相反,马利斯在 1961 年的全垒打记录是偏离中心的,它明显落在他整体模式的外面,除了偏离中心的记录之外,他的整体模式也大致是对称的,中心大约是 23,这两个分布的不同位置表明鲁斯作为全垒打的击球手的总体优势.

我们通过观察单个变量的分布的整体模式,就会学会寻找对称性或偏斜度,寻找一个或几个峰值,寻找中心以及围绕中心的扩展程度.对于一个正则模式的重要偏差有间断和偏离中心点.值得注意的是,虽然构造显示图是一种要学会的操作,解释它们也要求有一定的判别能力.

没有一种实际数据的分布真正具有符合某种数学形状的完美的对称性.也不是所有的分布都能简单用对称或偏斜来描述.太强调把我们所见到的分布进行分类,常常使教师和学生灰心丧气.要学会观察明显的特征,而不是在不明显的特征上过多考虑.还应该注意的是,观察数据自然就引导我们对所见到的进行解释.例如当我们注意到鲁斯的60个全垒打对他来说并不是什么不平凡的表现,而马利斯的61个全垒打则是一个远远超出他通常水平的突出成绩.

解释分布的整体形状是学习观察数据的一个重要组成部分.图2的矩形图显示学生所收集的在《大众科学》杂志上字的
[106] 长度数据.分布向右偏斜,因为2个字母到5个字母的字有许多,而长字则较少.(通常的统计词汇中把偏斜的方向定为长尾的方向,而不是大多数观测值集中的方向.)

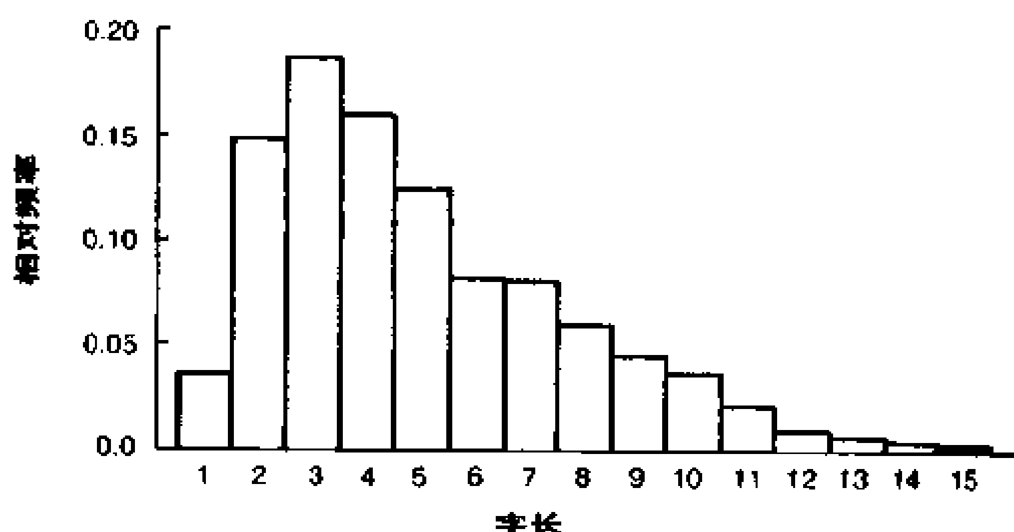


图2 学生所收集的在《大众科学》杂志上字的长度的数据显示出偏斜分布,因为较短的字比较长的字更常用.

图3的矩形图表示各州的学习能力倾向测验(SAT)口试部分的平均分数.分布是双峰的.靠近425表示的州,其中大多数上学院的学生参加SAT,而较高值的峰值表示的州,其中大多数

学生参加美国学院测验(ACT)考试,而只有申请上特选的学院的学生才参加 SAT.

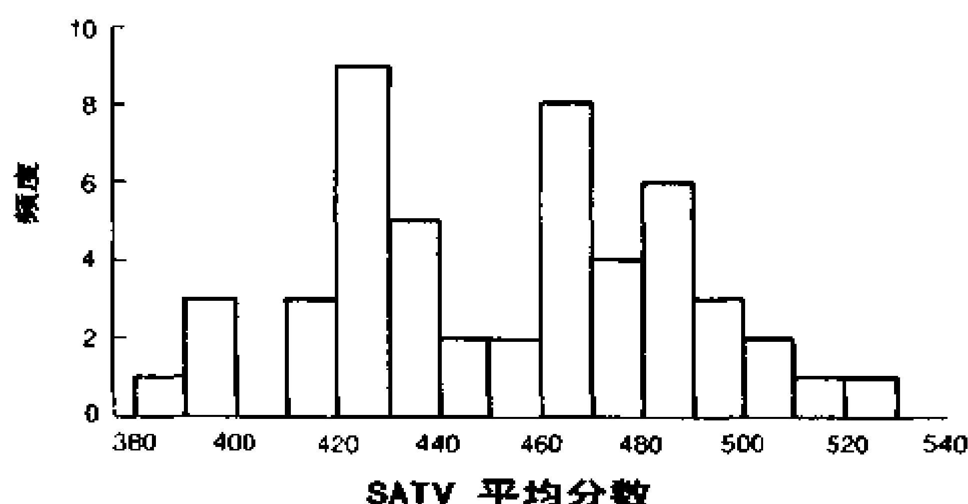


图 3 各州 SAT 口试平均分数的数据显示出两峰,它反映不同的参加测试传统.某些州中,大多数上学院学生参加 SAT,而在另外一些州只有少数学生参加 SAT——因为大多数学生参加 ACT 考试.

数 据 描 述

在考查鲁斯和马利斯的本垒打数据时,我们已经看到计算有助于我们描述数据.通过简单的计数("一半多,一半少"),我们就能更精确地得出在干形图看到的中心差数.数学工具的自然演进在第三个原则中显现出来,由图形到数值测量到数学模型.

在单变量数值分布的情形,数值描述的基本点是分布的中心(或位置)和扩展(或散度).(老的名词称为"中心倾向",比起"中心"或"位置"来既长又不清楚,现已很少被统计学家使用,应予放弃.)对于位置与扩展有两个共同组的描述测量值:一是具有四分位(或者其他百分位)的中位数以及具有标准离差的平均值.百分值只要求计数和懂得简单分数(对于中位数和四分位数就是$\frac{1}{4}$,$\frac{1}{2}$,$\frac{3}{4}$).平均值是指算术平均.因此,当学生掌握基本算术技巧之后,就可以引进平均值、中位数、四分位数,最小值,最 [107]

大值.这些简单的度量形成有用的描述词汇.

有了所显示数据的形状和数值度量之间关系的经验,会加强学生的数字感.虽然显示和度量都是初等的,但不应该低估能有效运用它们(而不是简单地计算观测值)的数学理解力.例如,在新教材的一次测试中,学生和老师都不相信,在一中心具有许多观察值的特殊分布的右端加上新的观测值,会保持中位数不变.[19]学生们有亲自动手处理多组数据的经验,包括力图通过观察显示以及讨论结果来估计测量值,有助于他们自己理解这种表面上简单的运算,像对有序表数到一半(中位数)以及对所有值求平均(平均值).

通过中位数,四分位数以及最大最小观测值对分布进行数值描述导致新的图形显示法——框形图.下面的例子说明这个工具能够多有用.美国农业部的条例把热狗分为三种类型:牛肉、猪肉和鸡肉.这三种类型所包含的卡路里数有没有差别?图

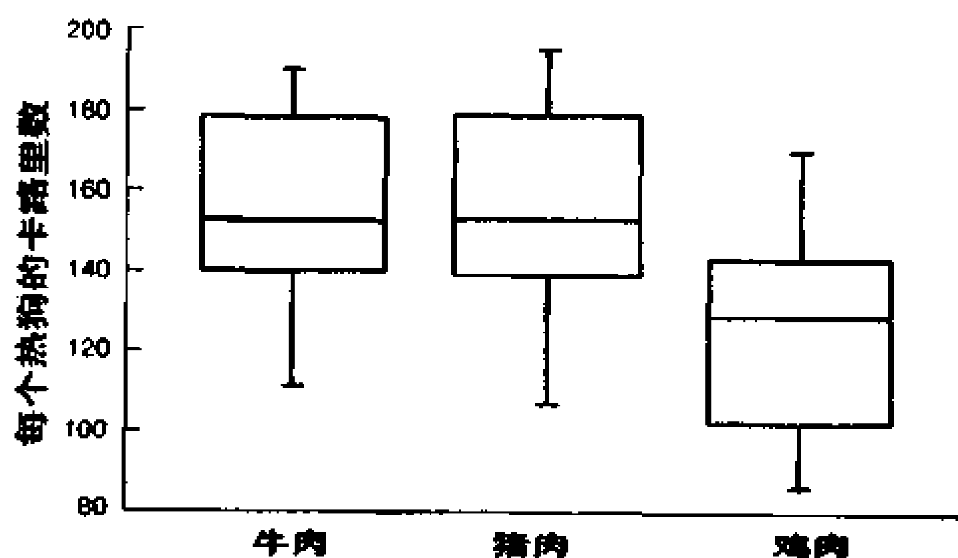


图4 三个方框直观地显示属于三种类型牛肉、猪肉和鸡肉各种商标的热狗的卡路里数的中位数,四分位和极值.我们不难看出鸡肉热狗作
[108] 为一个组,每个热狗包含更少的卡路里.

4用三个方框显示.这三种类型各种商标的热狗,每个热狗的卡路里数的分布、方框端点表示四分位数,方框内横线表示中位数.框外触须扩张到个别观测的最小值和最大值,由此可以看出牛肉和猪肉热狗的每个热狗的卡路里值相似,而鸡肉热狗从整体上讲热值要小得多.

数 学 模 型

在简短讨论单变量数据过程中,我们还没有提到标准离差,也没有谈到由图形显示到数值描述到数学模型的最后阶段.在数据描述中标准离差有许多不利之处,它很难用基本计算器来计算,它对于少量极值极为敏感,它也很难明显有目的地引进来(从这三方面看,观测量与其平均值的绝对偏差的平均值或中数更可取).

然而标准离差在统计学中非常重要,因为它对正态分布来说是扩展的自然测度.正态曲线为数据分布的整体模式提供一个紧凑的数学描述的例子.它是一种数学的理想化,并不抓住实质数据中的不正规性或者像偏离中心的偏差.举例来说,正态曲线是完全对称的.

为一般学生提供的大多数教材在讲到正态分布之前就告一段落.例如美国统计协会和数学教师全国委员会合编的数学文化丛书 7,10,11,15 就是这样.一个理由可能是,正态分布和其他分布的传统观点是把它看成概率分布,因此只有对概率学过相当的知识之后,才能进一步学习.但是,并不一定非得引进形式的概率才能使人知道.一大群同年龄同性别的人的身高大致是正态分布或者轮盘的停点在圆上大致是均匀分布的.

图 5 表示印第安那州的加利市全部 947 名七年级学生的爱荷华词汇测验的分数的矩形图,附有正态曲线,它近似描绘分数的分布.图中十分清楚地表明,正态曲线如何对某些数据分布提供一个理想化的数学模型.

由特殊的观测到“所有观测量”的理想化的描述是一次实质性的抽象.使用像正态分布或一致性分布这类数学模型来表述这种抽象是向了解数学的威力迈出重大一步.在这方面,计算机
[109] 模拟非常有帮助.学生们能够在他们对数据的经验的基础上做出“总体模型”,把他们的模型输入计算机,并且从总体仿造观测值.把仿造的数据同模型进行比较,可以提供关于概率和随机性的更多经验.正态曲线的基本性质,把观测值标准化到关于平均值的标准偏差单位的标度上的思想以及应用标准正态表来计算相对频率,都能在数据模型的正规模式的基础上发展起来.

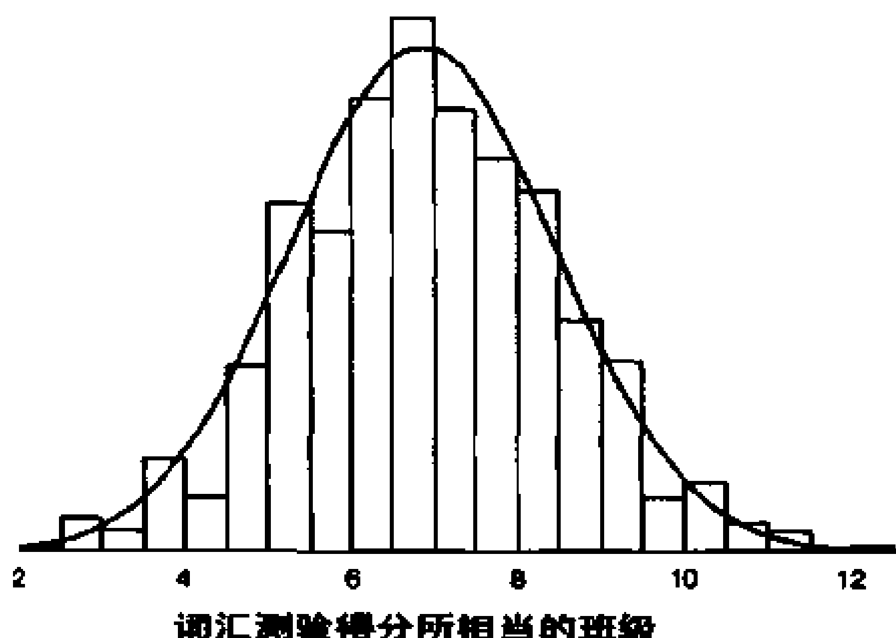


图 5 约1000名七年级学生词汇测验得分的方框图,表明它十分符合于钟形正态曲线的理想化分布.

虽然,数学意义下的分布是单变量数据的描述方法的进程的最后一步,但它们必定出现相当迟,哪怕是可以在概率全面引进之前就能出现分布.同时,只有当学生逐步掌握了必要的数学概念和技能,才能发展多变量数据的经验.按照我们的第一原则,在考查单个变量之后,才能开始研究两个变量数据.但是有

用的数学模型在两个变量情形更容易掌握.

两个变量数据的基本图形是散点图,它提供理解平面上坐标概念的基础.在散点图上,聚集点(女学生和男学生?)和偏离中心点引起讨论.最简单的整体模式是线性趋势.对线性模式给出一个简单描绘的数学模型是直线及其方程.数值的度量包括 [110] 每个变量分别的中心和扩展的度量,作为描绘线性关系的拟合直线的斜率,或许还有作为度量线性相关的强度的相关系数.

相关系数,正如标准偏差一样,与传统的统计模型和方法紧密相连.它的优点虽然是实实在在的,但只有到比较高级的学习阶段才清楚地显示出来.相关系数与最小平方回归密切相关,也就是相关性度量一种特殊的直线相关性的强度.正如应该把标准偏差拖到给出正态分布的上下文之后再讲,相关性与最小平方回归应该在中学学生实实在在地学过统计学本身之后才出现.

数据分析大部分,由于本身非常有用,能够从小学低年级一直教到中学一、二年级,成为发展定量技能和推理能力的整个教育的一部分.有了这种基础,直线拟合可以通过眼睛直观或者通过更简单的方法进行,这些方法比最小平方计算起来更容易,并且更能对付极端观测值.数量文化教材[10]给这种方法提供了一个清楚的解释,适于中年级采用.

多变量数据还有一些方面应该比相关性和最小平方回归还要早教,其中包括解释变量和响应变量的区别.关联性与因果性的关系,以及不可测量的"闪避变量"对观察到的关联性的影响.这些思想非常深刻但是不能计算,它们最好通过各种各样的显示和计算方法,对真实的数据得到的经验加以讨论来掌握,它们与理解自然科学和社会科学所提供的各种解释关系也非常密切.

在一般学校课程中教数据分析时,所选的题材不应该看它们在统计学科中的重要性,而是应该考虑它们与学生是否密切

相关，它们是否有助于加强学生对普遍的定量的理解，以及它们是否对不确定数据的推理有所裨益．统计学的确本身很重要，在大多数行业中，它比微积分更重要．这种重要性应该反映在中学高年级重要的选修课中，其中应该包括更高等的数据分析以及数据产生，概率和统计推断．

产 生 数 据

好的数据就像 CD 激光唱盘和杂交谷物一样是人脑的智能产品．有许多理由说明，为什么产生数据是关于数据和机遇的教
[111] 学的重要组成部分．对于我们十分熟悉的数据，我们最能有效地进行数据分析，因为熟知使我们考虑到要寻找的预期的特征，并且对没有预料的特征提出解释．为了回答特殊的问题，通过统计设计来产生数据是联系数据分析和基于概率的经典推断的桥梁．对于极端的态度——不管是认为统计无法证明的怀疑和不信，还是不顾一切地盲目相信，对此，我们总是对统计证据表示欢迎——除了从问题开始而以基于我们自己产生的数据所得到的答案告终的经验之外，没有更好的治疗办法．

统计学教学中所用的数据有几个来源，大部分是现成的数据，它们只是由教师或教本提供的数字．如果数据能够提供解释和讨论以及培养技能的良好基础，我们就可以在学生的经验或兴趣的范围之内的主题挑选数据并且提供适当的背景信息．现成数据对于较大的孩子更有用，因为他们有更广泛的知识和经验去理解数据的背景．我们能在课堂上讲那些学生们自己不能产生的有趣信息，这样就能很好利用省下来的时间和精力．例如有关附近城镇或邻区的政府的数据常常表现出人口、住房、收入和健康状况的模式，这些数据都信息丰富，令人惊奇．

第二个数据来源是课堂数据，它们是在教室中收集的，主要与班上的学生有关，而不问结论是否对于更大的群体也成立．不过对其结论的适用范围也有同样的限制．我们可以从简单的问

题开始："你的家中住着几个小孩?""你的口袋里有多少钱?"第一个问题产生整数的数据，第二个问题产生两位小数的数据.在计划产生数据的过程中，要事先想到要进行的数据分析，这点不管对于配备软件的专家，还是注意学生应该面对整数还是小数的老师都是一个提醒.测量也能产生课堂数据：用一个卷尺测量，得出所有学生的肩宽和两臂平展的长度，然后做出散点图并研究所揭示出的关系.

实验是第三个数据来源.实验是一种主动的产生数据的方法.观测，不论是询问还是测量，是谋求在不改变所观测的人或物的情况下收集数据的.在实验中，我们真正运用一些刺激，为的是观察其反应.在实验的情况下，解释变量和响应变量之间的区别最为清楚，而这是因果性解释的重要部分.实验在基础科学中最常见，它不同于产生课堂数据的问题或测量，它真正要得出 [112]
可以应用于更大范围的结论.当学生们把气球内的空气加热，看着气球涨大，他们要求理解的不仅仅是一个气球的行为，而且还有热对气体产生的一般结果.这种相当大的概念飞跃常常是潜移默化，没有明显讲出来.

从课堂数据过渡到统计设计的样本有极大的优点，它明显地显示出由这一点数据到代表更大一类总体的数据的转变.如何抽象是统计学之内的一个主题，它的寓意要比仅仅生成有趣的数据来进行分析远为广泛.统计学对于如何进行实验还有很多话要讲，虽然统计学的建议与基础科学大多数实验并没有关系.样本设计和实验设计是系统研究数据产生的主要课题.但是，无论从逻辑上还是从课堂经验上来看，首先要讲另一个课题：无论是询问问题还是测量来产生课堂数据都引出关于测量的问题.

测　量

测量某一种特征的意思就是用一个数来表示它.这个基本

概念已经引进一种抽象.对于测量的思考最终已经导致我们已经周密地想到为什么某些数是有信息的而另一些数是不相干的或者毫无意义.首先,什么是一个特殊性状的*有效的*(适当的或有意义的)测量方法?我们可以由可触摸到的物理特征开始.长度很容易测量,我们都同意用尺可以测量它.面积就比较难测量,我们不能像用尺对齐任何长度那样来"对齐"二维中所有可能的形状.我们必须努力去了解我们要测量的特征,去设计一个合适的仪器以及关注所用的单位以及它与其他单位的关系.甚至于对于物理测量,对于这类问题的学习贯穿在学校的数学和科学课程的始终.

但是,物理测量的有效性比起社会科学和行为科学的测量问题来要简单得多.测量一个家庭有多富或者一个同学有多友好有什么好方法?爱荷华测试或者 ACT 和 SAT 学院入学试验真正测量出什么?对这些问题仔细的研究就会离题太远.但是我们应该鼓励学生问:为了要达到预想的目标,数据是否事实上是有效的.过了 65 岁的司机比起 16 到 17 岁的司机要出更多的车祸死亡事故.难道十几岁的年轻人真不那么有风险吗?不,只是因为 65 岁以上的司机人数更多.真正适当的测量是事故的*比
[113] 率*而不是*次数*.十几岁青年车祸死亡事故率大约是老年人的三倍.

测量仅次于有效性的第二个主要品质是*准确度*.测量过程可能表现系统误差或者偏差.像一个磅秤的读数总少 3 磅,偏差只有当测量应该得出的"真值"得到明确理解时,才是一个明确的思想.SAT 的分数的可能偏差一直是激烈争论的题目,因为没有"真确值"可用来进行比较.一般来讲,物理测量要比行为或社会测量远为明确得多.

测量过程还表现出*变差*,即对同一量进行重复测量并不得出同一结果.通常仪器所产生的变差(像浴室用标尺和皮尺测量)对于所有欲达到的准确度来说是很小的.因此,我们总是对

测量中的变差忽略不计.我们要求学生在测量长度或者重量时,在刻度之间进行插值,或者通过肉眼估计长度或计数,就可得出一组可变的观测值,其分布可以用数据分析工具来显示和讨论,偏差可以通过测量值分布的中心来描述,而变差可以用扩展来描述.

学生在测量活动之后对数据的讨论使他们提高对测量质量问题的敏感度.下面就是学院一个班的例子:

> 教师要每位学生测量他或她的心率(每分心跳次数),并记录在一张纸上.收集到的数据的干形图表出一个偏离中心的点几乎肯定是来自一个大错,虽然没有人会承认他记录坐着的心率达 180.干形图还表现出心率尾数为 0 过多实在令人怀疑.经过询问揭示,有些学生在体操课上学会数 6 秒的心跳数然后乘上 10.这就导致对所用的测量方法的讨论.大多数学生数 60 秒的心跳数.班上认为这种方法比体操班的方法更为准确,但是它在 60 秒期间一开始和结束时的一半心跳有误差.有人提出用秒表计量精确 50 次心跳的时间,然后由这个时间算出每分钟的心跳数.这个方法被接受为更准确的实用测量的方法. [114]

统 计 设 计

样本调查和实验设计是统计学的核心课题,也是概念上一次重大转变.数据分析强调手头的特殊的数据,而现在数据被看成代表更大的总体,而我们所要了解的正是这个总体.学生们往往觉得这再一次抽象不好理解.例如,他们总是把几个学生所做的实验工作、所得出结果的差异试图归结为个人(例如萨拉、马休和卢斯)的特征.而"抽样"的观点只是把这些学生看成大的学生群体的代表.我们对于个人特点不再感兴趣,尽管它们也许能够解释萨拉、马休和卢斯的工作表现.

由数据分析到推断的转变也沿着数学抽象的道路平行发展．样本的平均值 $\bar{x}$ 不再只是一个单个的数，而是这些数据的位置的一个度量．$\bar{x}$ 被认为是在随机变量分布的背景之下一个随机变量的实现，它必须在这样背景下来看：假如我们多次重复这个数据生成过程会出现什么情况．这样就不能掩盖这些新思想的困难．

幸运的是，设计的数据产生过程的概率的观念以及推断的逻辑之间的紧密联系不一定马上显现出来．我们首先可以得到对于数据的一些很有价值的看法．例如，非常重要的是认出不具代表性的数据．我们知道的一些基于少数人的传说的证据，以一种不能经受过检验的方式影响我们的思考．因此，它们必须受到检验．个别的情形总是引起我们的注意，因为它们在某些方面是不同寻常的或者它们出现在我们身边的环境之中，例子和讨论将表明没有理由认为，这些案例在任何情形下具有典型意义．

不适当的抽样方法，特别是自愿回答的样本（即回答者选择他们自己）也是应该批判的对象．下面是一个例子：

> 咨询专栏作家安妮·兰德斯(Ann Landers)每隔两三年就要进行一次自愿回答的调查，让她的读者回答一个引起争论的问题，其结果总是对宣传她的专栏的报纸文章和广播采访有利．她第一次调查最说明问题，因为存在一项比较．1975 年安妮·兰德斯问："假如你能重新选择的话，你是否还会要孩子？"在接近 10 000 个回答者中，大约 70% 回答是"不"，许多人在回答中还加进动人的故事，讲述他们的孩
> [115] 子对他们实施的种种暴虐行为．自愿回答的本性就是吸引那些对问题的争论具有强烈感情，特别是负面感情的人．为了对安妮·兰德斯的结果所引起的注意做出反应，进行一次全国范围内的随机抽样，结果发现 91% 的父母还会再要孩子．

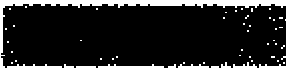
自愿回答很容易产生 70% 的"不",而真正情况是 90% 的"是".这种数据是对任何人都没有用的信息,除了那位提出它的人.然而,新闻媒体不仅报导自愿回答的数据,好像它们描述一般的群体,而且还组织读者打电话和写信的民意测验产生更多这种数据.对传说的证据和自愿的回答说明我们需要系统的方法来选择样本.

统计学家所推荐的方法是让没有个人因素的客观的机遇来选择样本,随机抽样消除个人选择的偏差,这种偏差不管是来自抽样者还是来自回答者.深思熟虑地使用机遇是产生数据的最重要的统计原则.乍一看来,放弃个人判断似乎是不自然的,但是机遇如果同传说的证据和自愿的回答进行对比,就显得不那么骇人听闻了.我们可用简单的随机样本来解释运用机遇的方法,也就是规定大小的所有可能的样本都有同样的机会被真正选成样本.

不难在教室中进行简单的随机抽样,最开始可以从帽子中抽取名字小条或者从抽样皿中抽取各种颜色的小球.然后可以使用随机数的表,最后用计算机模拟.我们不要忘了这样的警告:太快地引进计算机会使随机选取的本性模糊不清.在全国抽样调查中所用的更为精致的随机抽样设计在教学的开始不一定涉及.

最简单的随机化的比较实验与简单的随机样本密切相关.通过讨论某种不加控制的或者非随机化的实验,我们能再一次明显看出需要好的设计.下面是一个例子:

> 一位政治科学家对于宣传在改变群众意见的有效性问题感兴趣,他进行一个以学生为对象的实验.学生们先参加一项对德国态度的测试,其后几个月经常阅读德国的宣传品,然后再对他们的态度再一次测试.这一年是 1940 年,在



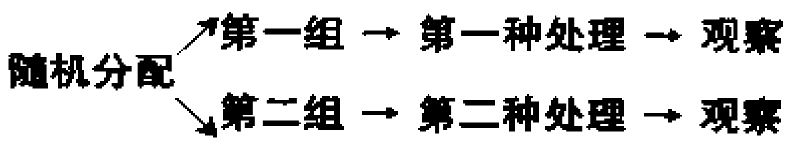
初期测试后再次测试之间，德国入侵并占领荷兰和法国.学生们对德国的态度发生了巨大的变化，但是我们永远也不
[116] 会知道，多少变化是由于阅读德国宣传品所致.

这个实验设计的形式在自然科学的实验室实验中是常见的：

观察 → 处理 → 观察

在实验室的被控制的环境之外，这种简单设计和实验常常不能产生有用的数据.处理的效应不能同外在变量的效应区别开来，虽然不是所有这种干扰都像法国失陷那么具有戏剧性.

统计设计的实验包括两个基本原则：比较(或控制)和随机化.最简单的随机化的比较设计对两种处理进行比较：其中之一可能只是一种控制的处理，例如不准阅读宣传品.下面是设计的略图：



随机分配是把对象的一组简单的随机样本指定进行第一种处理，而其余的对象则进行第二种处理.随机化则保证在指定对象进行处理时没有偏差.因此在施加处理之前，两组是(平均上)相同的.比较则保证外界的力同等地作用在两组之上.如果除了实验处理之外，我们小心地同样处理所有对象，任何反应结果的系统差别必定反映出处理的效应.比较随机化的实验容许我们得出因果性的结论——反应结果不只是与处理有关，而且实际上就是由处理造成的.

正如在抽象的情形一样，更精细的设计在实践中相当常见，但是不一定在教学开始时讲授.具有随机化的课堂实验容易做而且很有价值.例如，考虑像橡皮糖图象之类的标志，它们代表对象，这些对象被指定进行对严重头痛进行两种互相竞争的实验.学生们进行随机指定，随机化完成之后，有些标志的底部有

一个看不见的记号.这些对象实验者是不知道的,他们患有脑瘤,任何治疗办法都是无效的.通过随机化把这些对象分到两个组中有多少公平可言?反复进行随机化并显示点的分布.重复进行随机化提供了随机变差的经验,它引导到概率和推断. [117]

一些注意事项

掌握了数据分析和数据产生的基础之后,年长的学生可以考虑进行认真的统计学学习.最近课程计划的实例中包括一些样本,一个是学生对学校咖啡屋中提供服务的选择的意见,一个是当地十字路口各种车辆的样本.它们按照车型和从车牌上显示出的县区来分类,以及一篮球投篮板球实验中距离和角度对成功率的影响.这些研究的设计提供了有价值的经验去应用统计思想.分析真实数据得出可靠结论是令人满意的.但是必须预见到产生数据的实际问题,并把它保持在可接受的范围之内.

下面摘自一个为中学提供的新统计材料细致研究的报告,其中数据产生的活动是精心安排的,包括道路交通调查和投篮实验,他们的经验值得注意.我们的室外试验经验使我们相信收集数据是统计学教育的一个重要组成部分,这至少有两个理由.第一,学习如何设计并进行数据收集活动(决定独立和相依变量以及样本大小)对于经济学是基本的.第二,收集数据是一种动员经验,它使统计分析对学生更有意义,更产生兴趣.

但是,我们的经验也使我们相信,收集数据也能给教室带来巨大的挑战.例如我们的室外试验教师报告,他们花了大量的授课时间来收集数据,而不是开发和分析数据,只是发现学生们的数据不完全也不准确.这些挑战证明对学术进步具有如此破坏性以及教师越来越不愿意进行依赖于数据收集的统计和研究.

概　　率

机遇变化可以经验地进行研究,应用数据分析工具来显示

随机结果中的规律性.概率引出一大套数学,它能描述的机遇要比观察所希望发现的远为详尽.概率论显示出数学的威力,它能从简单的假定推出广泛的、意想不到的结果,这给人留下深刻印象.

例如,投掷硬币可简单地描述一串独立试验,每次试验产生正面向上的概率为$\frac{1}{2}$,由这个不加假定的基础得出像迭代对数律这种漂亮的结果.迭代对数律给出当投掷硬币继续进行时,正
[118] 面朝上的次数的涨落的精确边界.对于均匀的硬币,n 次投掷之

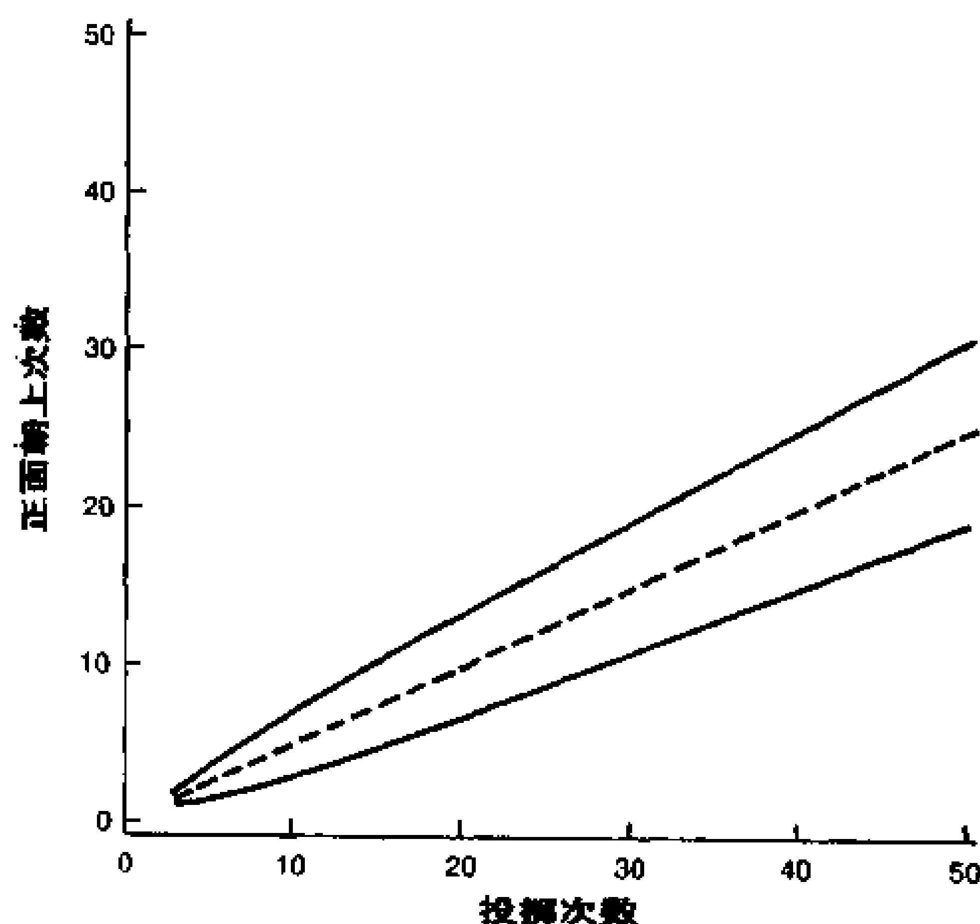


图 6　迭代对数律描写投掷硬币时的涨落区域中心线是平均线值$\frac{n}{2}$,两边的曲线同中心线的距离为$\frac{1}{2}\sqrt{n}\sqrt{2\log\log n}$.

后，正面朝上的次数分布的平均值为$\frac{n}{2}$，如果把它对 n 作图，得出一条直线（见图 6）. n 次投掷，正面朝上，次数的标准偏差是 $0.5\sqrt{n}$. 迭代对数律是讲，正面朝上的涨落的范围是在平均线的两端各伸展 $\sqrt{2\log\log n}$ 倍标准离差. 把正面朝上的次数对 n 作图，当投掷继续下去时，正面朝上的次数将无穷多次逼近距两条边界内任何给定距离，而只有有限多次跨越这两条边界. 数据分析，甚至于在计算机模拟的帮助下，也不会发现这个迭代对数定律.

概率正如数学中其他漂亮而有用的领域一样，实际上甚至在中学教学中的地位也很有限. 因为概率的基础在数学上颇为简单，很容易忽视概率概念与直观的想法的冲突的范围，而直观的想法稳固地建立起来后，在学生上中学时很难去掉. 甚至当学生能够正确回答典型的测验问题时，仍然还会保留对概念的误解. 从教师的经验和研究工作都肯定概率思想的概念上的难度.[5,21] [119]

早年被引导的关于随机性的经验是成功地教形式概率的重要准备. 数学概率来源于研究机遇、博弈绝非偶然，因为它们提供少有的背景，其中简单的随机现象被观察到足够多次足以显示出明显的长期模式来. 教学可以沿着历史的发展道路重新来一遍，先记录由机遇工具得出的数据，然后记录由随机抽样的计算机模拟的数据. 但是，不管这种经验在学生的成长过程中出现早或晚，它需要相当多的时间才能获得对随机事件行为的适当洞察力.

基　础

理解数学概率的第一步出现在初级班里由机遇设备所得到的数据当中. 学会观察整体模式而不对每一结果试图进行因果性解释（“她没有猛推轮盘”），这种抽象可以弄得比较容易，因为

寻找数据的整体模式是数据分析的核心战略之一.

其次要认识到,虽然结果数目随着试验的增加而增加,试验中每个结果出现的比例(相对频率)只有在长期试验中才稳定下来.概率就是这种稳定的长期相对频率的数学理想化.学生学会比例的数学时,就可以开始学习概率,这可以通过对有限结果的集合指定概率,然后把观察到的比例同这些概率加以比较.

如果不加以周密计划,把结果同概率进行比较,可能令人沮丧.如果观察到的相对频率非常可靠地接近概率,计算机模拟有助于提供所需的大量试验.在较短的试验序列中,观察到的结果与概率的偏差对学生来讲似乎非常之大.心理学家[20]已经注意到,我们倾向于相信,由概率描述的规律性甚至对随机结果的短期序列也适用.这种对不正确的"小数定律"的相信可以解释赌徒的行为,他们把掷出一串骰子都赢作为赌者"好运"的证据.提出这样的因果性解释是因为我们大大低估了在随机序列中连串的概率.

> 让几个人模拟投掷一个均匀的硬币 10 次,写下一个正面朝上或背面朝上的序列,相继出现正面或背面朝上的最长连串有多长? 大多数人会写下一个序列,其中没有超过
> [120] 两个正面朝上或背面朝上的连串.但事实上在 10 次投掷均匀的硬币中,连续投掷出 3 次或 3 次以上正面朝上的概率为 0.508,而连续投掷出至少 3 次正面朝上或 3 次背面朝上的概率则大于 0.8.

涉及连串的概率演算十分困难——这是适用计算机模拟的极好领域.在实际进行硬币投掷(并由概率论所预见的)中连续出现正面朝上或背面朝上的连串似乎使我们很惊奇.因为我们没有料到会出现长连串,由此我们推断硬币投掷可能不是独立的,或者某些影响干扰了投掷硬币的行为.

在篮球场上也出现同样的误解.如果一个队员连续几次投

中，不论球迷还是队友都相信他或她“顺手”，似乎下一次更有可能投中.然而检查一下投球数据，[22]连续投中或连续失误的次数并不比一系列独立随机试验所预料的出现次数更多.投篮球也同掷骰子一样，虽然投中的概率因人而异.正如这些例子所表明的，甚至作为长期相对频率的概率思想十分复杂，需要周密的经验支持.

稍后，完全理解比例之后，就可以促使我们提出概率的数学模型：样本空间（所有可能结果的集合）以及在其上指定概率，它满足若干基本规律或公理，其中包括加法规则：即对于不相交事件，$P(A \text{ 或 } B) = P(A) + P(B)$.对于事件的简单组合的其他加法规律可由这些规律或者更简单由比例的性质推导出来，这些加法规律是初等概率的数学内容.

数学概率发展到这点，让我们停下来进行一些非数学练习，把概率规律应用到数学思维的另外一方面，它对于学生不太自然，这就是对逻辑命题细心和逐字地阅读.心理学家研究概率概念时，提供了许多练习，它揭示出许多概念误解并帮助纠正它.例如，特维尔斯基和卡内曼（Tversky and Kahneman[21]）给学院学生看一位年轻女性的个性概述，然后问它们下面的命题中哪一个更有可能成立：

- 林达是银行出纳员.
- 林达是银行出纳员而且积极参加女权运动.

约有85%的学生选择第二个命题，虽然这个事件是第一个事件的子集.尽管我们通过各种办法改变我们的陈述，使得我们的论点更透明，但是他们仍然犯错误，他们没有学过概率.社会科学毕业生中学过一些统计课程（有学分）的在这同样测试“只 [121]
有”36%答错了.因此我们希望这项研究有助于使我们认识到关于概率的数学事实与日常生活中的思维有关.尼斯比特等人（Nisbett et al[17]）关于学习前后的比较的报告提出更强有力的证据，表明正式学习的效果.在学习概率的数学之前或当中，最值

得强调概率思想的概念和定性的方面.

进一步研究

与掌握概率的基本概念相反,要发展重要的、可应用的技能需要更细致地学习.这时,我们要离开应该提供给所有学生的数学概念的核心领域.有几条逻辑途径通往中级概率论.例如,选择的材料依赖于:是否把概率论作为自身很重要的课题来教学,还是把它主要为了进一步引向统计推断来教学.

首先,一个反面的建议:不要停留在计算有限样本空间中的概率的组合方法上.组合学是和概率论不同的主题而且更难.各种水平的学生会发现组合问题很难,令人困惑.学习组合学并不使我们增进对机遇的概念的理解,也不比其他学科更能发展使用概率建模的能力.在大多数情形下,应该避免组合问题,除非是最简单的计数问题.

从概率基础向前迈出更富有成果的一步是考虑条件概率、独立性和乘法规则.对于事件 A 发生的知识常常改变指定给另一事件 B 的概率.例如,知道一位随机选择的大学教授是女性就使教授的专业是数学的概率减少.在给定 A 的条件下,B 的条件概率记作 $P(B|A)$.不一定等于 $P(B)$;如果这两个概率相等,则事件 A 和事件 B 是独立的.这些概念涉及许多新思想和基本技术,它们在建立自然科学和社会科学中的数学模型时是极有价值的.

十分可能,提出独立性的思想以及独立事件的乘法规则 $P(A\text{ 和 }B)=P(A)P(B)$,而不去注意一般的条件概率.如果我们的目标是更有效地达到统计推断,这条道路是有吸引力的.这条道路还避免了与条件概率有关的相当大的概念困难.我们很
[122] 快就能掌握在固定次数的独立试验中的成功次数的二项分布以及其他有趣的应用,例如复杂系统的可靠性.

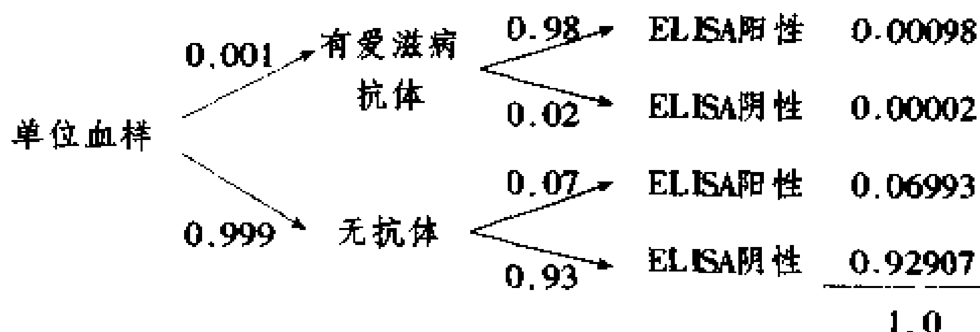
如果避开条件概率,就要强调独立性的定性意义以及随意

假设独立性成立的危险．克鲁斯卡尔的论文(Kruskal[9])包含许多随意假设独立性的例子和反思，其中特别强调对靠不住的奇迹的"独立"验证．关于独立性、二项分布以及独立事件的乘法规则的主题，应该是中学高年级数学的主要内容．

如果目标是使学生在比较高级的水平上能够建立和使用对过程的数学描述，细致学习条件概率还是有吸引力的．对非决定性的多阶段过程的建模需要条件概率．我们给出单一的例子，检验在罕见的条件下出现的假阳性就是应用条件概率于一些当前问题，像药物检验，使用测谎器、爱滋病抗体的甄别等．下面是引自最近报告[6]的一个例子，其中进行详尽的统计分析：

> 80 年代中期所引进的 ELISA 检验法甄别供血中是否有爱滋病抗体．如果血中出现抗体，则 ELISA 试验具有 0.98 的概率阳性．如果被检验的血液被抗体沾染，这个试验有 0.07 的概率阳性，这些数字都是条件概率．如果由 ELISA 试验法甄别的 1000 份血样中有一份含有爱滋病抗体，则所有阳性结果的 98.6%是假阳性．

对 ELISA 血中爱滋病抗体甄别试验中假阳性的优势的计算可用图 7 展示的简单树形图进行．理解条件概率和树形图的学生不难设计一个计算机程序来模拟十分复杂以致难用解析方法研究的过程．



$$P(\text{无抗体}\mid\text{ELISA阳性})=\frac{P(\text{无抗体和 ELISA 阳性})}{P(\text{ELISA 阳性})}$$
$$=\frac{0.06993}{0.00098+0.06993}$$
$$=\frac{0.06993}{0.07091}=0.986$$

图 7　用 ELISA 检验法检验爱滋病抗体的假阳性的计算可用树形图进行，其中沿着每一支乘以适当的条件概率.

就像早期的概率学习中一样，条件概率带来一组新的概念困难，如果教育完全指向于去教定义和规则的话，这些困难往往很容易地、很不明智地被忽略过去.学生们感到 $P(A\mid B)$，$P(B\mid A)$，$P(A$ 和 $B)$之间的区别很难掌握.我们可以展示一张穿着时髦的美丽动人的女性照片，问她是一位时装模特的概率.答案表明这个问题可以解释为问：已知是一位时装模特的女性，她穿
[123] 着时髦，美丽动人的条件概率，也就是回答者混淆 $P(A\mid B)$和 $P(B\mid A)$.鉴别已知的信息 A 和其概率是要求的事件 B 这类定性练习是在正式学习 $P(B\mid A)$前必需要做的准备.

转 向 推 断

随机抽样和实验随机化给我们提供随机性的经验，它不仅
[124] 推动我们学习概率，而且促使我们学习基于概率推断的推理方式.重复的抽样以及重复的实验随机化显然产生变化的结果.这种变化在专门的意义下是随机的而不是偶然的，因为设计要用到明显的机遇机制.因此，一种民意测验的结论(如全美成年人的 61%需要全国的健康保险系统)，还需要有误差的上下限，它反映在同样的样本调查中可能出现的随机变化的程度.同样，像一个新的医疗方法使标准的方法过时而废弃不用的结论，只有当其优越性的上界超出同样实验可能发生的随机变差时才能得到支持.

由数据产生所观察到的随机结果，像样本比例和样本平均

值一样是统计值.样本统计值是随机变量(具有数值的随机现象).这种统计值在重复抽象或重复实验随机化的正规的长期行为可用抽象分布来描述.通常都把抽样分布看成随机变量的概率分布.随机变量、随机变量的分布以及它们的矩量形成中等概率论的另一类基本材料.

比例涉及计数的分布,在稍加理想化的假设之下,它是一种二项分布.如果总体分布是正态分布,样本平均值也具有正态分布.处理随机变量平均值和方差的一般规则也适用于样本比例和平均值,特别是样本比例和平均值的标准离差,都随着样本大小 n 的增加,以$1/\sqrt{n}$的比率减少,这个事实使我们理解较大样本的好处.

当观察次数 n 无限制增加时,会出现什么情形?概率论中的主要极限定理就是讨论这个问题的.大数定律指出,样本比例和平均值(在各种意义下)逼近于其总体的相应比例和平均值.中心极限定理断言,随着样本大小增加,不论是比例还是平均值,都变得趋近于正态分布.

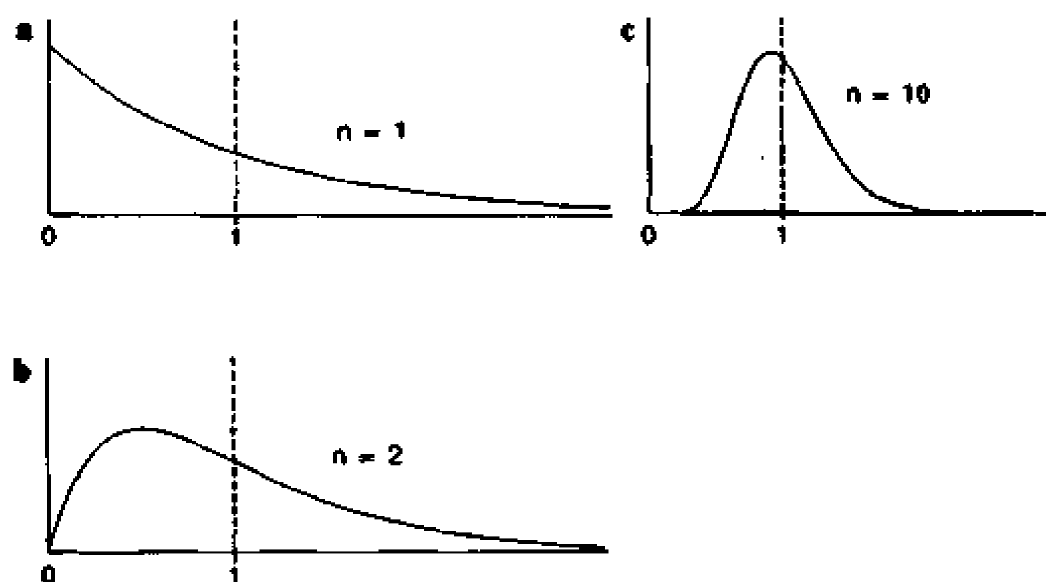


图8　动态的中心极限定理:样本平均值的分布从偏斜分布(a)当样本大小由2(b)增加到10(c),显示逐步趋向于正态分布.



图8用图象的形式来表示中心极限定理.它从一个观察的分布开始,表现成向右偏斜,远非正态分布.这种形态的分布常用来描述没有用坏的零件的使用寿命,这种特殊的分布的平均值为1,图中另外的曲线表明从原来分布得出的样本大小为2和为10的样本平均值 $\bar{x}$ 的分布.当只有10个观测量进行平均,正态曲线形状的特征
[125] 已经开始显现.用计算机模拟将更戏剧性地显示出这种效果.

这包括大量的材料,如果正式表出是十分令人厌烦的.传统的学院统计学教育中坚持在学习推断之前,先讲大量的概率论(至少像独立性和随机变量之类的主题),肯定需要对独立性和分布连同其平均值与标准偏差的某种理解.但是这些题材的传统教学中的数学形式主义的程度在学院水平一般是不需要的,在中学更不用谈.经由形式的概率论到统计学的道路漫长而艰难,证明这种传统的方法很差.正如加菲尔德和阿尔格林(Garfield and Ahlgren)得出结论:[5]……教导学生使他们能从概念上掌握概率,仍显得是一项非常艰巨的工作,充满了意义不明确和错误的观念.因此,我们从实用角度推荐可以平行进行的两种研究方法:一种是继续开发引出概率正确概念的方法,另一种是探讨可以不用技术上正确的概率论,就能教统计推断中有用观念的方法.

幸运的是,从低年级开始的强调数据分析经验已经为基础概率和初等推断的教学提供背景材料.通过模拟,先是物理的模拟,然后用软件,能够演示概率论的重要概念,而且特别适于显示抽样分布.正像以前对正态分布所指出的,数据描述给作为理想化的变化模型的分布提供适当的背景.教给所有学生的核心数学课程应该包括数据分析以及只把基本的概率概念和规则做
[126] 经验的引进,它们大致相当于"数量技能"丛书中材料的水平.[15]

推　断

统计学关注于数据的收集、整理和分析以及由数据推断基

本的现实情况."从数据推断现实"的确是棘手的难题.涉及许多具有哲学性质的争论.统计学家对于大多数富有成果的推断方法都有不同意见,这不足为奇.巴耐特(Barnett[2])对于各种争论的立场给出一个比较的综述.

贝叶斯的还是经典的?

最重要的哲学分歧存在于贝叶斯推断和经典推断之间.要对课程做出明智决策,对于这种区别有某种程度的理解是必不可少的.最简单的推断问题就是:如何根据由样本计算出的统计量得出关于总体参数的结论.所谓参数就是描述总体的一个数.例如所有18岁到22岁美国女性的平均高度,在这种情形下,一个有关的统计量是一组年青妇女构成的随机样本的平均高度$\bar{x}$,为了达到推断的目的,我们要设想从同一总体中重复抽样,$\bar{x}$如何随样本而变化.这个统计量的抽样分布就描述这个变化.抽样分布反映总体参数,在这种情况μ是$\bar{x}$的分布的平均值.正因为抽样分布依赖于未知参数,从而统计量带有这参数的信息.

经典推断植根于像长期规律性这样的概率的概念以及相应的思想之中,这种思想就是推断的结论可以用一些数来表示,它们在重复的数据产生中总会出现."μ以95%置信度位于64.5英寸和64.7英寸之间"这种说法是"我们通过一种方法得到这个区间,它对于所有可能样品的95%是正确的"的简化说法.古典推断中的概率命题是对方法而言,而不是对所考虑的特殊结论而言.实际上,对于特殊结论的概率命题毫无意义,因为总体参数虽然不知道,但却是固定的.

贝叶斯的方法希望对于参数值引进先验的信息,这可以通过下面的方法来办到,把参数μ看成随机量具有已知的概率分布,这分布表示我们对这个值的不确切的信息.在传统意义上讲,所有美国年轻女性的平均高度μ不是随机量,但是它是不

确定的.我十分肯定 μ 在 54 英寸和 72 英寸之间,我想它更可能 μ 靠近这区间的中心.我对不确定性的主观评价可以用 μ 的
[127] 一个概率分布来表示.

从贝叶斯的观点看来,概率的概念可以扩展成包括这种个人的或主观的概率.这里的新东西不是数学,数学还是一样的,不同的是概率的解释,它不再解释成长期的相对频率,而是表示对不确定性的主观评价.统计量 $\bar{x}$ 的抽象分布现在理解成,在给定 μ 值的情况下,$\bar{x}$ 值的条件概率.然后,通过计算把先验的信息和观测到的数据结合起来,得出在给定数据之下,μ 的条件

相干.如果目标是古典推断的话,从数据分析经产生数据的随机化设计和概率到推断这条主线是更加清楚的.

在经典统计推断的导论教学中,总出现两类推断:置信区间和显著性检验.这两种类型的推断的推理方式,可以在关于数据的讨论中非正式的引进来.在中学的高年级的概率和统计的课 [128]
程中应该保留其严格的讨论和特殊的方法,除了几个特殊的程序之外,不应该再多讲什么.特别对显著性检验情形,形式的方法常常使推理方式难于理解,以致于我们最好完全不谈假设和试验统计.

置 信 区 间

关于置信的论述的推理比较简单易懂,而且关于民意测验以及其误差边界的新闻报导为我们的讨论源源不断地提供了大量例子.只有 1500 人的样本如何能够精确地代表 1.85 亿美国成人的意见.随机抽样提供了解释的一部分;抽样分布提供其余部分,而置信区间解释误差边界的意义.

学生对抽样分布的模拟有了某些经验之后,就可以引进置信度的论述.对于推断最基本的是,总体和样本的区别,随机抽样的思想以及抽样分布的概念.模拟使我们在探讨抽样和抽样分布的过程中逐步引进置信区间.置信区间的思想可以通过模拟样本的图象显示来讲授.[10]更正式的讲法要求学生熟悉正态分布.

假设在一个大县里,高中学生中有 30% 开车上学,对于 250 名学生的简单的随机样本,问他们今天是否开车上学,这样就产生 250 个独立的观测值,每个都有 0.3 的概率说"是".在样本中说"是"的比例 $\hat{p}$ 随样本的不同而变化.例如模拟 1000 个样本,然后显示 $\hat{p}$ 的抽样分布.这个分布近似是正态分布,其平均值为 0.3,标准偏差为 0.029.从这个整体中,重复模拟各种大小的样本,就显示出来抽样分布的中心仍然是 0.3,而扩展形态由样

本大小来控制.在大的样本(大约1000或更多),样本统计值$\hat{p}$的值紧密集中于总体参数值$p=0.3$附近.学生们由经验就可以看出,这样大小的样本能够对整个总体做出很好的推测.

可是,基于一个样本的推测究竟有多好?我们可以通过描述统计量$\hat{p}$如何随重复抽样变化来把答案定量化.关于正态分布的一个基本事实是:所有观测量的大约95%处于平均值的两边的两个标准偏差之内.因此,在重复抽样时,所有由250个学
[129] 生构成的所有样本的95%给出一个样本比例$\hat{p}$,它处于开车上学学生的真正比例0.3的两边大约0.06之内,模拟也表明的确如此.

现在,假设在另一个大县有一个250名学生的样本,其中有105名学生开车上学.我们就推测,该县中所有开车上学的学生的真正比例p接近于$\hat{p}=\frac{105}{250}=0.42$.假如其可变性与我们模拟的县大致相同(实际上的确如此),对于所有样本的95%$\hat{p}$在p的± 0.06范围之内.我们就说,我们有95%置信(相信),未知的总体比例p位于区间0.42 ± 0.06之中,更一般来讲,区间$\hat{p}\pm 0.06$对未知p是一个95%置信区间.

图9显示置信区间在重复样本中的行为.当画出大小为250的重复样本后,有一些区间$\hat{p}\pm 0.06$覆盖p的真正比例,而有些则不覆盖.但是,从长期来看,所有样本的95%产生出的区间都覆盖真正的p.也就是说,随机区间$\hat{p}\pm 0.06$包含p的概率是0.95.在经典推断中一般都是这种情形,这个概率关系到这个方法在无限多个重复样本中的表现.

上面论证的第一部分属于抽样与模拟的学习范围,本质上是对于总体大小来讲似乎很小的样本,经验上显示出惊人的可靠性.由这种抽样显示所出现的事实比我们在论述的第二阶段给它们穿上的形式外衣要重要得多.第二阶段属于对推断进行的更深入学习的阶段,大多数样本结果接近真值这个定性的结

论，通过给出一个区间和一个置信水平而变得定量化．这个结论的本质以及它的局限性都应该强调．

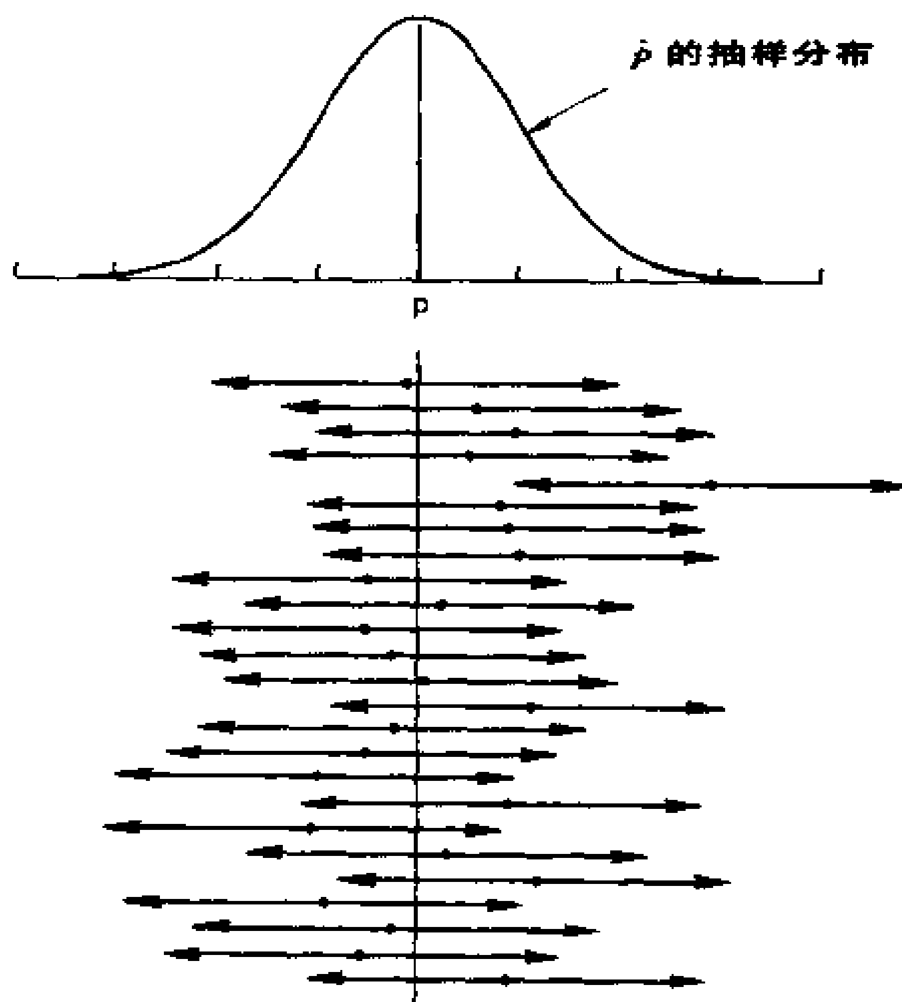


图 9　从相同总体重复抽样的置信区间的行为，正态曲线表示抽样比例 $\hat{p}$ 以总体比例 p 为中心的抽样分布．其中黑点表示从 25 个样本中的 $\hat{p}$ 值．其置信区间由两边的箭头来表示．从长期来看，这些区间中有 95% 将包含 p．

我们置信命题的根据是什么？只有两种可能性：

1．区间 0.42 ± 0.06 包含真正的总体比例 p．
2．我们简单的随机样本是 $\hat{p}$ 不在真正值 p 的 0.06 范围内的点的少数样本之一．全部样本中只有 5% 给出这种不



精确的结果.

我们不可能知道,我们的样本是 95% 当中的一个(即区间覆盖 p)还是倒霉的 5% 当中的一个.讲"我们 95% 相信未知的 p 位于 0.42 ± 0.06 当中"只不过是"我们通过一种在 95% 的时间内给出正确结果的方法来得到这些数的"简短说法.

至于这种思维方式的局限性,我们不要忘记置信区间的误
[130] 差边界只包含随机抽样误差.但在实践中,有许多其他误差来源并没有提到.例如,全国民意测验通过电话来进行,使用的是随机地拨居民电话号码的装置.电话调查显然忽略掉没有电话的家庭.还有,民意测验者常常发现,回答电话询问的多达 70% 是妇女.这样,在样本中,男人的代表率就降低了,除非采取一定步骤去接触男性.在实际统计活动中,这些事实给民意测验以及其他的样本调查带来偏差.

显著性检定

置信区间的目的是估计总体参数并伴随估计指示出由于数
[131] 据中的随机变化而产生的不确定性.显著性检定并不对未知参数提供一个估计,而只是评价在总体中是否出现某种效应或者差距.仅仅认识到需要这样一种评价,认识到不是所有观测结果都使真正的根本原因显著地暴露出来,就已经表现出统计的思想.同为科学节的演示做准备的有能力的学生谈话的评判发现,任何在想要得到的方向上所得的任何效应不管多小,都被认为是可信的.随机变化的作用根本没有认识到.

统计显著性是回答问题"是否观察到的效果比我们能合理地只归诸为机会的要大?"的一种方式.下面的一个重要例子用来非正式说明显著性检定的推理方式:

> 在越战期间,国会决定,年轻人应该随机地选择去服兵役.第一次抽签在 1970 年举行,按照随机的顺序,抽取出出

生日期，按照他们出生日期被选中的顺序，再挑选青年人．抽签之后新闻机构声称，在那年出生较晚的人被挑中人数较少，因此被征入伍的人数也较少．数据分析（图 10）明确提示出生日期和征兵数目的确存在联系度量挑选号码（1 到 366）和出生日期（1 到 366，从 1 月 1 日开始）．联系的强度的统计量就是相关系数．事实上，在 1970 年抽签中 $r = -0.226$，这是否是抽签不是真正随机的一个好的证据？

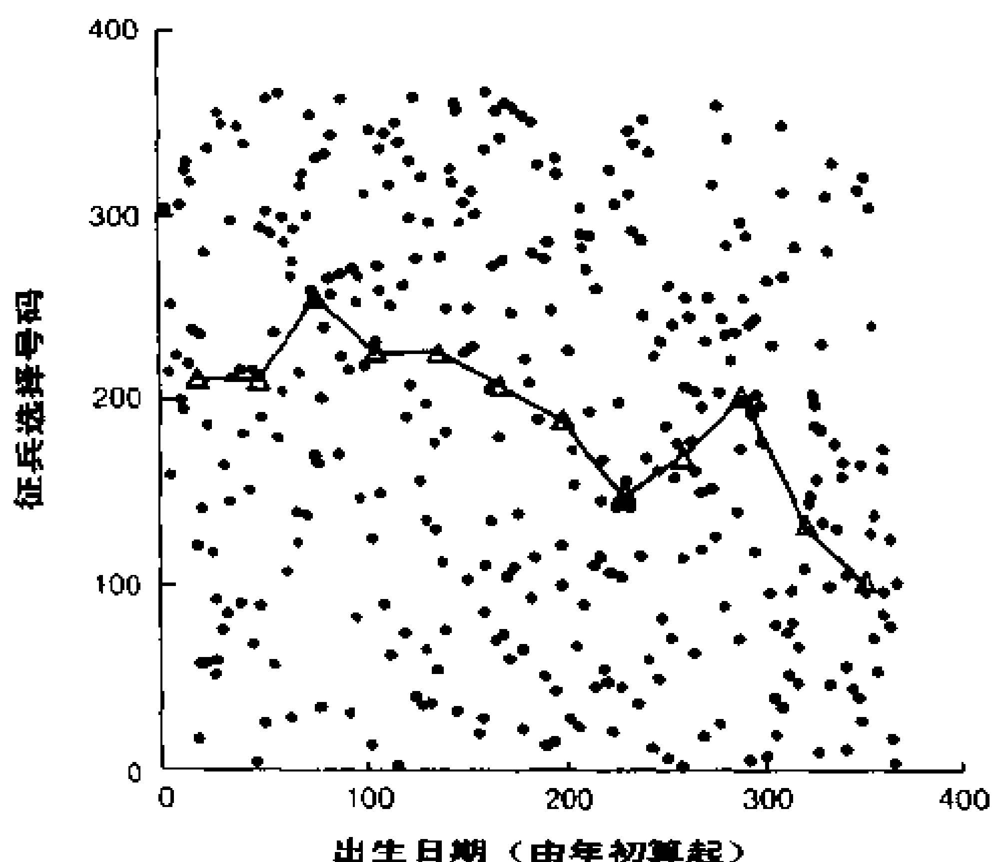


图 10　1970年的征兵抽签的数据揭示出很小的负相关性．生日靠近年末的人似乎有小的选择号．通过画出每月的中位数，这个趋势就看得更明显．用线段连接每月的中位数而显示趋势的方法称为中位描绘法，是常用工具来揭示效应变量对解释变量的散点图的模式．

显著性检定通过问一个概率问题来解决这个问题：假设为

了论证抽签真正是随机的,什么是随机抽签产生由 r 至少远离 0 到观察到的 $r=-0.226$ 的概率?答案是随机抽签产生如此一个远离 0 的 r 的概率小于 0.001.结论:因为在 1970 年抽签中观测到的远离 0 的 r 在随机抽签中几乎不会发生,我们有强有力的证据说明 1970 年的抽签不是随机的.

图 10 显示 1970 年抽签中指定给每个生日的抽签号的散点图,在散点图中很难看出生日和签号之间有什么系统的联系.巧妙的图形学能强调这种联系,就像在图中一样.但是要知道是否观察到的联系比可以合理地只归诸于机会的要大,就需要概率的演算.

在给生日随机指定抽签号时,我们会期待这种相关接近于
[132] 0,而 1970 年抽签中观察到的相关系数为 $r=-0.226$,表明生在年末的人倾向于得到较小的签号.单用常识不能断定是否 $r=-0.226$ 意味着抽签不是随机的.归根结底,在一个随机抽签中,相关性几乎从来也不精确为 0.可能 $r=-0.226$ 是在可能只由于机会的变化而产生的数值范围之内.

为了解决这种不确定性,我们把观测到的 -0.226 同一个参照分布进行比较,它就是一个真正随机的抽样分布的 r.我们发现真正的随机抽签几乎从来得不出一个 r 离 0 远到 1970 年所观测到的 r.概率计算能够告诉我们常识不能告诉我们的——$r=-0.226$是一种很大的效应,在随机抽签中是令人吃惊的效应.这使我们相信 1970 年的抽签是有偏差的.经过调查研究发现,装着生日的小袋每一次装满一个月的,并没有适当的混
[133] 合,后面的日期仍然留在顶部,容易被先抽取〔费恩伯格(Fienberg)对 1970 年的征兵抽签进行了详细的分析,包括对结果进行全面的统计分析〕.

在分析数据中常常遇到这样的问题:"这是不是一个重大的结果?"或者"这是不是一个惊人的结果?"很自然的可以通过把个别的结果和参照分布进行比较来给出一个答案,就像我们非

正式地把新生儿的体重同所有新生儿的体重分布进行比较一样.我们肯定应该鼓励学生认识到机会变化的作用,并且通过把个别的结果同适当的参照分布进行比较来非正式地评估"显著性".如果学生正学习概率和计算机模拟,就可以用概率和抽样分布的语言来进行这种比较.但是正式的"假设检验"并不一定出现在中学的课程当中.

这有几个理由.陈述假设、计算检定的统计量以及同列表的数值进行比较的例行方法,都有效地掩盖了显著性检定的推理方式.这个推理本身相当困难,充满细微奥妙之处.使用显著性检定的有效实例比起民意测验和类似的置信度命题的例子来,离开日常的经验更远.在学校中通过概率、抽样分布、置信区间以及不断强调用这些工具对不确定数据进行推理来结束统计学的学习,就会大大有助于对数据和机遇的理解乃至发展更一般定量推理能力.

统 计 思 维

统计学和概率论是讨论各种自然和人工过程的不确定性和变化的科学.在这方面它们就不单是数学课程的一部分,虽然它们从这个背景来看是非常合适的.概率论是数学内的一个领域,而统计学正如物理学或经济学一样,是必需大量而且不可少地应用数学的一门独立的学科.我们必须断言,统计学是一种基本的探究方法,是一种一般的思维方式,它比建立这门学科的任何特殊的事实或技术都更为重要.如果说,教育的目的是开发广泛的智能技术,统计学应该在教和学上占有不可缺少的重要地位.教育应该教导学生读写方法和历史方法,对人类社会进行政治分析和社会分析,通过实验科学对自然进行试验,并获取数学的抽象和演绎的威力.由不确定的经验数据进行推理也是同样有力而普通的智能方法. [134]

这并不是说,为统计学本身而对特殊的统计方法进行全面

的训练应该在学校课程中占有突出的地位.实际上,不应该这样做,但是从广泛的观点来理解的统计思想应该是每一位受过教育的人的智能装备的一部分.我们可以把统计思想的核心要素总结如下:

1. 变化在过程中无处不在.个体是可变的,对同样个体所进行的重复测量也是可变的.在自然界和人类事物中,严格确定论的范围十分有限.
2. 需要关于过程的数据.统计学是不变的经验主义的而不是思辨的,头等优先的事是察看数据.
3. 在考虑变化的情况下设计数据产生.考虑到不可控制变化的来源,我们必须避免自我选取的样本,坚持在实验研究中进行比较.我们通过随机化把有秩序的变化引进数据产生之中.
4. 变化的定量化,随机变化用概率进行数学描述.
5. 解释变化,统计分析设法求得个体和测量的随机可变性的背后的系统效果.

统计思想并不深奥难懂,也不背离日常生活经验.但是,孩子们要不上统计课程,就不能开发统计思想.学生们教育从拼写和乘法开始总是认为世界是决定论的,他们很快学会设想一个答案是正确的而其他的都不对,至少当答案用数字形式来表示时是如此.变化则没有想到,也让人不舒服.听听阿瑟·尼尔森(Nielsen[16])描述他的市场研究小组与精明的市场经理们打交道的经验:

……太多的企业界人士认为,所有印在纸上的所有数字都同样正确.他们认为数就表现真理,觉得很难同概率的概念打交道.他们不把数看成我们描述基础条件真正知识的某个范围的一种缩写.例如,尼尔森公司给制造商提供通过零售店的销售估计.……有一次我决定我们要画出所有图表,表明围绕所报告的数字的概率范围;例如销售或者上升 3%或者下降 3%,或者在

中间某个范围，这结果成为一个傻主意．我们的主顾干脆就不能同这种类型的不确定性打交道，他们的反应，就好像报告的数字是福音书一样．

关于数据和机遇的教育目标就是培养能明智地应付变化和不确定性的能力．有证据表明，这种教育的确能改善这种能力．尼斯比特等人（Nisbett et al[17]）描述对于各种各样推理的教学的 [135]
研究，他们注意到，对概率论和统计学的教学增加了学生主动考虑机遇变化的情况，甚至教学以一种传统方式进行，即不打算在没有系统的背景下应用概率推理．下面是一个典型的例子：

［让被问及的对象］解释为什么一位女推销员在第一次去一个饭馆享受一顿真正美味佳肴之后，再次去这家餐馆往往都败兴而归．没有受过统计学训练的对象几乎总是用完全非统计的、偶然的观点来回答这个问题，诸如"可能厨师换了不少人"或"她期望太高了，以致食物达不到这个水平"．而学过统计学课程的对象则给出包含统计考虑的回答．例如"很少有餐馆只有美味佳肴，她只是幸运头一次就碰上这个机会"．这机会只不过占去的次数的 20%．

尼斯比特和他的同事们发现下面的情况引人注目：即使一个十分抽象的教育也对日常的事件的思维产生效果．如果教育指出统计思想可以应用在日常生活之中（在学校教育中肯定应该如此），这个效果就更加强大．有证据表明，我们事实上是在讨论一种基本的而且普遍可应用的智能技术．尼斯比特也报告，研究表明，对于决定论学科的教学，甚至在研究生水平，也不能同样地改进日常的统计推理思维．这就证明，我们正在讨论的是一种独立的智能方法．

为什么要教数据和机遇？在实践中统计和概率很有用．特别是数据分析帮助我们学习基础数学．但是，更重要的是因为统计思维是一种独立的和基本的智能方法，它应该在学校课程中受到注意．

参考文献和推荐读物

1. BBN Laboratories. *ELASTIC and Reasoning Under Uncertainty*. Final Report, 1989, p.30.
2. Barnett, Vic. *Comparative Statistical Inference, Second Ed*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1982.
3. Efron, Bradley. "Computers and the theory of statistics: Thinking the unthinkable." *SIAM Review*, 21 (1979), 419 - 437.
4. Fienberg, Stephen E. "Randomization and social affairs: The 1970 draft lottery." *Science*, 171 (1971),255 - 261.
5. Garfield, Joan and Ahlgren, Andrew. "Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research." *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1988),44 - 63.
6. Gastwirth, Joseph. "The statistical precision of medical screening procedures: Application to polygraph and AIDS antibodies test data." *Statistical Science*, 2 (1987), 213 - 238. [136]
7. Gnanadesikan, Mrudulla; Schaeffer, Richard; Swift, James. *The Art and Techniques of Simulation*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publishers, 1986.
8. Jones, L.V. (Ed.). *The Collected Works of John W. Tukey*. *Vol*. 3: *Philosophy and Principles of Data Analysis*, 1949 - 1964; *Vol*. 4: *Philosophy and Principles of Data Analysis*, 1965 - 1986. Monterey, CA: Wadsworth & Brooks/Cole, 1986.
9. Kruskal, William. "Miracles and statistics: The casual assumption of independence." *Journal of the American Statistical Association*, 83 (1988), 929 - 940.

10. Landwehr, James and Watkins, Ann. *Exploring Data*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publishers, 1986.

11. Landwehr, James; Watkins, Ann; Swift, James. *Exploring Surveys and Information from Samples*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publishers, 1987.

12. Mathematical Sciences Education Board. *Reshaping School Mathematics: A Philosophy and Framework for Curriculum*. National Research Council. Washington, DC: National Academy Press, 1990.

13. Moore, David and McCabe, G. *Introduction to the Practice of Statistics*. New York, NY: W.H. Freeman, 1989.

14. National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

15. Newman, Claire; Obremski, Thomas; Schaeffer, Richard. *Exploring Probability*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publishers, 1986.

16. Nielsen, Arthur C., Jr. "Statistics in marketing." In Easton, G.; Roberts, Harry V.; Tiao, George C. (Eds.): *Making Statistics More Effective in Schools of Business*. Chicago, IL: University of Chicago Graduate School of Business, 1986.

17. Nisbett, Richard E.; Fong, Geoffrey T.; Lehman, Darrin R.; Cheng, Patricia W. "Teaching reasoning." *Science*, 238 (1987), 625 - 631.

18. Rubin, Andee; Bruce, Bertram; Rosebery, Ann; DuMouchel, William. "Getting an early start: Using interactive graphics to teach statistical concepts in high school." *Proceedings of the Statistical Education Section*. American Statistical Association, 1988, 6 - 15.

19. Rubin, Andee and Rosebery, Ann. "Teachers' misunderstandings in statistical reasoning: Evidence from a field test of innovative materials." In Hawkins, Ann (Ed.): *Training Teachers to Teach Statistics*. Proceedings of an International Statistics Institute Roundtable, July 1988.

20. Tversky, Amos and Kahneman, Daniel. "Belief in the law of small numbers." *Psychological Bulletin*, 76(1971), 105 - 110.

21. Tversky, Amos and Kahneman, Daniel. "Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment." *Psychological Review*, 90(1983), 293 - 315.

22. Vallone, Richard and Tversky, Amos. "The hot hand in basketball: On the misperception of random sequences." *Cognitive Psychology*, 17(1985), 295 - 314. [137]

(胡作玄　邓明立)

形　状

玛乔丽·塞内查尔

引　言

我们每天无时不刻地不碰到模式:在讲出和写出的字中,在各种音乐形式和电视图象中,在装饰设计和自然界的几何中,在地面和空中的交通图中,在我们建造的各种对象中.我们认知、解释和创造模式的能力是应付我们周围的世界的关键.

形状是模式.某些形状是可见的,对每个人都很明显:像房子,雪花、苜蓿叶式立体交叉、纽结、结晶、阴影、植物等等.而另一些形状,像 8 维万花筒或者 4 维流形,是高度抽象的,只有极少数人能理解.

几何学家布兰科·格林鲍姆注意到,"现在基于形状和位置的相互作用的智力难题和游戏越来越普及,说明几何形体以及它们之间的关系对于许多人具有很大的吸引力"."在一个声音、一个运动或者一个几何图形的简单重复中,正如由分子复杂堆积成为晶体,由细胞经复杂的集成构成生命的较高级形式或者无数的组织层系的例子一样,都显示出明显的模式.几何模式能够成为许多种现象的比较简单的模型,对几何模式的学习和研究可能而且应该在各种水平上进行".

尽管形状有着基本的重要性,学生们在学校中却学得很少.

从历史上看，对形状的学习被归入几何学(直译为“大地测量”)，长期以来，欧几里得的公设、公理和定理在几何学中占主导地
[139] 位.

正如莎士比亚对文学是不够的，哥白尼对天文学是不够的一样，欧几里得对几何学也是不够的.正如所有时代和所有地区的学者一样，欧几里得撰写的是他当时所知道的概念，并且用他当时可能得到的方法加以讨论.因此，他不写关于地图、网络或者可变形形体的几何学，而所有这些在今天却有某种中心的重要性.

形状是数学中生动的、不断增长的而且迷人的课题，与古典几何学有着深刻的联系.但是在内容上，意义上和方法上远远超出古典几何学的范围.经过适当的发展，对形状的学习能够形成数学教育的中心部分，这一部分不仅取自数学，而且也取自科学和艺术，它们还对数学、科学和艺术也做出贡献.

正如许多其他重要的概念一样，“形状”是不能定义的名词.我们不能精确讲出“形状”的意义，这部分是因为总是不断发现新类型的形状.我们假定我们多少知道形状是什么，也就是说，只要我们看到形状，不管是用我们眼睛看到还是在我们的想象中，我们就知道它是形状.

但是我们知道的远远比这多.我们知道形状在某些方面相像而且其他方面不同.橄榄球不是篮球，但是它们都是光滑的封闭球面：三角形不是正方形，但它们都是多边形.我们知道形状可以有不同的性质：由麦秆做成的三角形具有刚性，而用麦秆做成的正方形则没有.我们知道形状可以变化，但是在某种意义下还是一样：我们的影子总是我们的影子，尽管一天到晚它们的大小和外周轮廓不断的变化.

在研究形状时，我们的目标与古希腊的哲学家十分不同：发现对象的相似性和差异，分析形体的组成部分，认知在不同表示中的形体.分类、分析和表示是我们三个主要工具.当然这些工

具紧密地相互联系在一起，因此在某种程度上它们之间的区分完全是人为的．对称性是分类模式的工具还是分析模式的工具，事实上，两者皆是．然而，分开讨论这三个工具还是有益的．

分 类

古代数学最大的成就之一就是只有五种 3 维凸体，其表面由正多边形构成，而且每个角顶上都有相同数目的多边形相交．这些形体称为正多面体，如图 1 所示．这个发现如此激发古人的想象力，以致柏拉图以这些形体作为他的物理原理的基石（见他的对话《蒂迈欧》），欧几里得也把他的《数学原本》[140]
的第 XIII 篇大部分用于它们的作图，它们至今也没有失去它们的魅力．

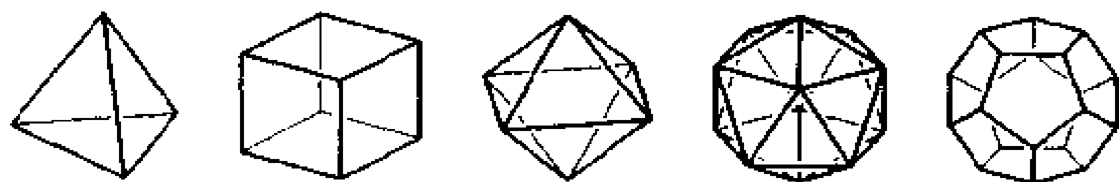


图 1 五种正多面体，每种有单一类型正多边形构成，在每个角顶上都有相同数目多边形相交．正四面体、正八面体、正二十面体由三角形构成，正立方体由正方形构成，正十二面体由正五边形构成．

今天，我们很容易低估发现正多面体的意义，在当时，它是数学想象力的主要成就．首先，为了计数某类对象，你必须能够察觉，它们的确"属于某一类"．也就是说，你必须认知这些对象具有使它们区别于其他对象的性质，而且能够以一种毫不含糊的方式刻画它们的独特特色．其次，你必须能够利用这些判据，精确地找出满足这些判据的对象．没有人确切知道这些古人如何做出他们的发现．但是，对于今天的孩子们却不难，特别是当他们有正多边形在玩时，不难使他们相信正多面体的名单是完全的(图 2)．

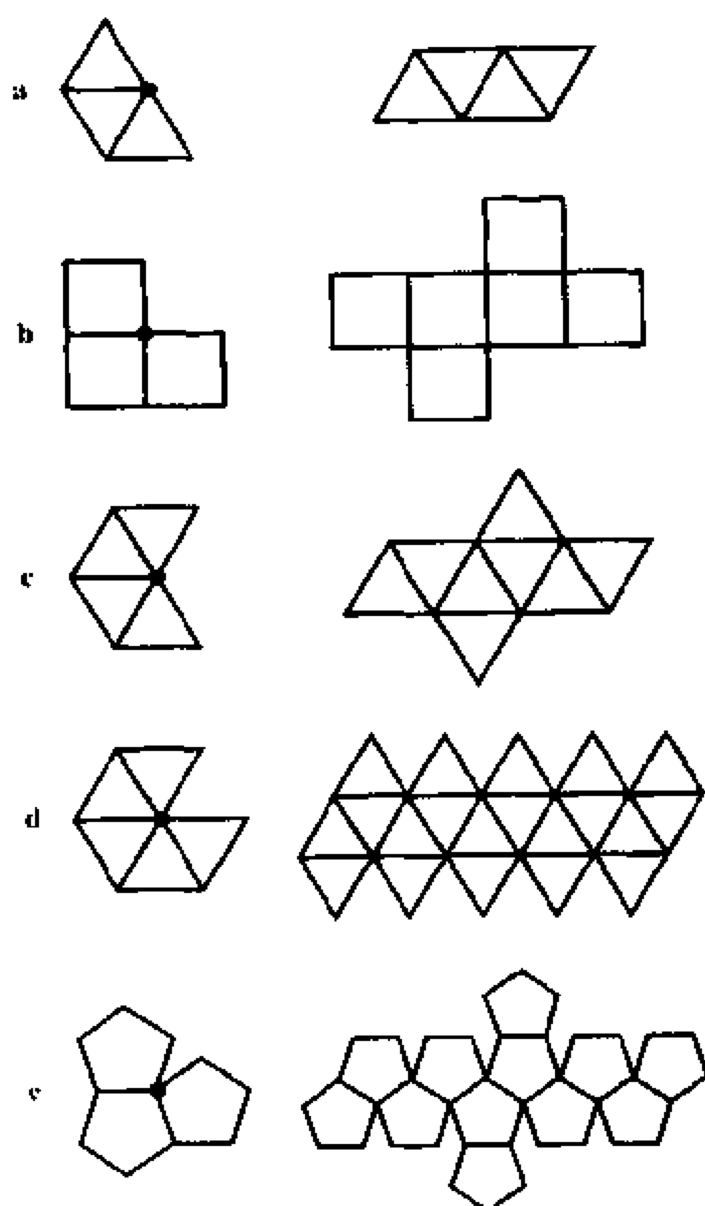


图 2 只有五种正多面体，因为全等的正多边形在一点只有五种排列方式，使它能折在一起，形成一个凸多边形顶点．图中表示五种排列以及它们能够折成整个多面体的完全模式．

这种数学分类的关键要素已经使用了几千年之久：刻画一类对象，并列举该类中的对象．经过多少世纪后所发生的变化以及今后还将不断变化的是对我们似乎重要的刻画的种类以及我们用来列举的方法．图 3 表示我们可以从数学观点归在一起的几类对象，这类例子可激发学生讨论：每一类由什么性质刻画？

有没有不同的方法来对这些对象分类？还有其他对象属于这些类吗？下面我们要提到一些分类方案在许多应用中证明是有效的．

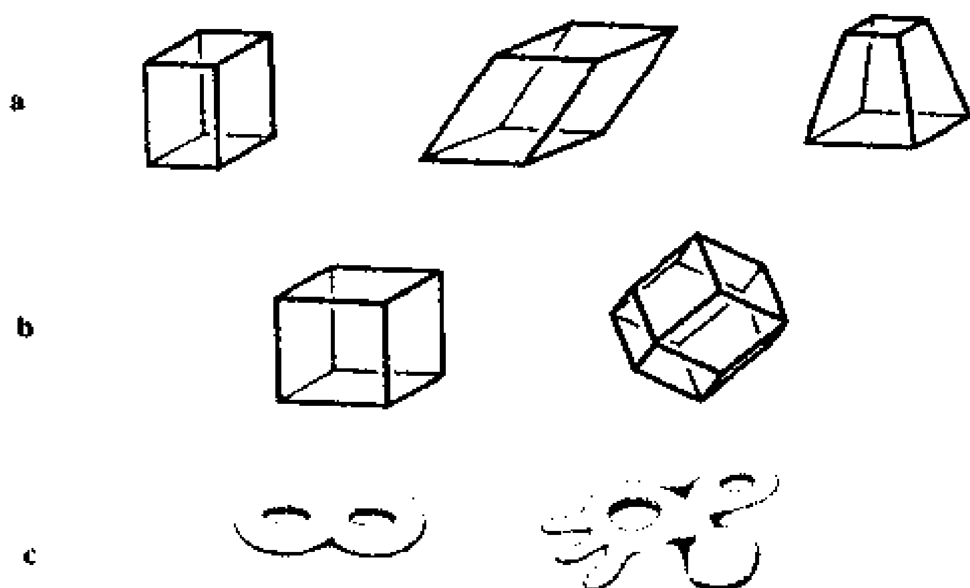


图 3 把立体对象分成有用的类的一些例子，每一类中的形状有什么共同之处？

全等和相似 两个对象全等，如果它们一直到最终的细微末节都完全一样，除了它们在空间中的位置可以不同．像食品杂货店里(同一品牌)的西红柿汁罐头，地面上的正方形铺砖以及被褥上图案中的六边形，都是我们熟知的全等图形的例子．两个对象相似，如果只是位置和尺度不同，相似性似乎是一个非常基本的概念．学龄前儿童就能懂的小动物模型，洋娃娃的衣服，玩具房子都是我们熟悉对象的小型化．甚至这么小的孩子都知道这些小的对象表示什么东西．这个事实表明，他们已能从直观上理解尺度的变化．让(任何年龄的)小孩建造和拆开塔、桥、房屋 [141]
以及各种形状的缩小尺度的模型都使他们牢固地掌握这个观念．

对称性和自相似性 正方形是对称的，如果你围绕其中旋

转 90°,180°,270°或 360°,它保持不变.它还有 4 条镜反射对称线,关于每条线,你可以把它反射到自身上(图 4).很容易想到其他对象同正方形一样,也具有同样的对称性或者自全等性,像红十字标志、四个均等摆放的珠子的手镯、四个舞蹈者的圆圈以及没有茎的四叶苜蓿是其中少数例子.对称性按照它们组成部
[142] 分的排列来分类对象,它们可能相当精妙,例如图 3b 中的两个多面体具有相同的对称性.

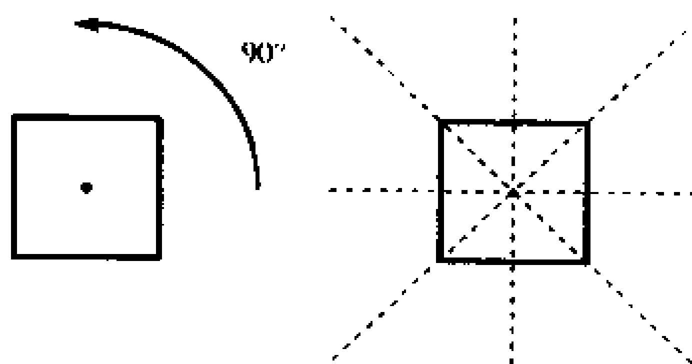


图 4　如果正方形围绕其中心旋转90°,180°,270°或 360°,它保持不变,它还有 4 条镜反射对称线,关于每条线,你可以把它反射到自身上.

正像全等导致对称性(这正好是自全等性的另外一个名称),因此,相似性自然地推广到自相似性.按照艺术史家 E·H·冈布里奇(Gombrich[9])的说法:"美学经验的基本经验在于愉悦处于厌烦和困惑之间的某个地方."可能这就是为什么分形以及其他自相似图形产生如此大的激动的原因之一.

诗人约翰·济慈(John Keats)写道"美是真,真是美".自相似性近年来被认为是自然界的一个深刻概念.把诺贝尔奖金颁发给表述"重正化群",以及当前对混沌理论遍及世界的跨学科的兴趣表示相似性和尺度对于科学和数学的深刻意义.标度的研究激发起对分形和其他自相似的几何图形的研究,而且反过来它们也激发标度的研究.

组合性质　全等性和相似性是度量的概念:它们可以通过

长度和角度的改变而改变.但是形状的另一些性质在这些变化 [143]
之下保持不变.例如当我们拉伸或弄弯多边形,多边形的棱数和顶点数并不改变.图 7 中的三个六边形都是六边形,尽管它们既不全等也不相似,都是由六条线段围成的封闭图形.多边形是六边形是它的一个组合性质.

大致来讲,形状的组合性质是我们可计数的事物以及它们互相联结的方式.这样从组合观点来看,图 3a 中的图形是等价的,它们每一个都有 6 个面,8 个顶点及 12 条棱,它们彼此之间以相同方式相互联结.网络问题常常涉及组合问题.例如,如果我们想要为建筑物中的计算机设计连接系统,我们首先关心的是找出能提供我们所要的连结系统的连线和结点的可能的排布.只有到这时,我们才需要考虑我们要有多长的电缆.

拓扑　拓扑等价比组合等价还要更一般.从拓扑的观点看,所有多边形都是闭环路,所有多面体都一样.皮亚杰论证在儿童发育过程中拓扑的概念先于度量的概念出现.小孩可能先认识闭圈,然后才能区别开不同种的闭圈,像圆圈和三角形:是一个

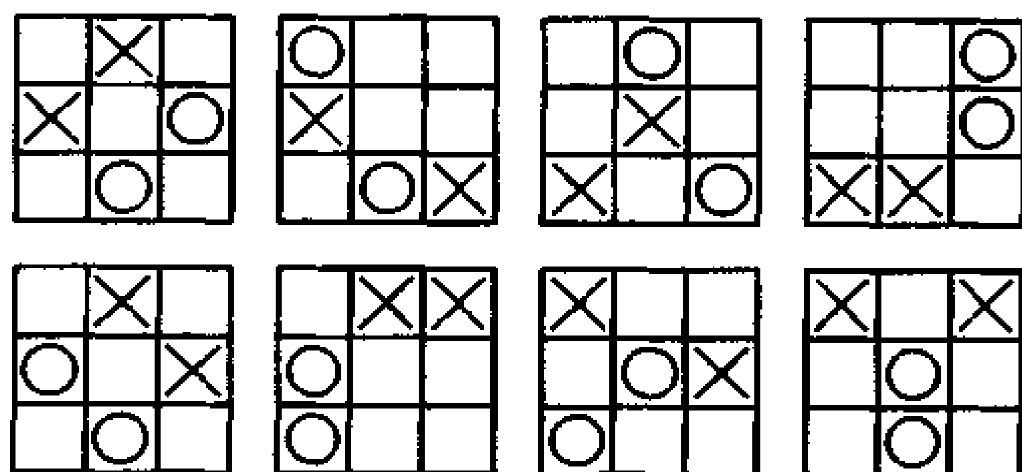


图 5　在环面上的画连城游戏,棋盘的对边叠合在一起,也就是看成一样,这就好像把棋盘滚成一个圆筒,然后把它弯曲成内胎形.数学家称之为环面.你能否告诉我在环面游戏中,上面哪些位置是等价的.

闭圈与是一个纽结情形相反，是图形的拓扑性质.

学校中的拓扑学常被描述为"橡皮膜的几何学"，其中产生许多极好的例子，使孩子们对图形的可变形的概念大大扩展. 在橡皮膜的几何学中图 3c 中的两个图形是不可区分的，因为其中每一个都可以变形成为另一个. 男女童子军的种种纽结是通过
[144] 亲自实践的学习的极佳材料[12]. 孩子们可学习在环内玩画"连城"游戏以及需要几何头脑训练的其他有趣的游戏(图 5).

随着结构复杂性的提高，拓扑分类必然变得更加困难. 这时计算机视觉可以成为有用的工具. 年长的学生可以理解定向的概念，它能刻画圆柱面和莫比乌斯带的差别（可定向和不可定向），还可理解亏格的概念，它刻画球面和环面的差别（亏格 0 和亏格 1）. 理解这些概念会大大丰富科学、设计和数学的学习.

命　名

形状需要名称. 语言最基本的用处之一就是给事物命名. 命名是反映在我们神话以及在许多当代宗教活动中的一个原始概念. 命名是走向认知的第一步，不管它是一个人的名字还是形状的名字. 如果我们不用名称，我们就无法思考形状(或者任何其他诸如此类的东西)或者向其他人解释我们的想法. 学习专业名称有时被贬低为死记硬背，但是这种说法实际上不得要领. 专业名称并不是任意取的；它们在概念框架上编码，而正是在这个框架上我们组织我们所命名的事物.

例如，在讲英语的国家中，最末的名字表示(家庭的)姓，第一名字则表示家中的一个人. 因此玛丽·琼斯是琼斯家的名叫玛丽的成员. 形状的名称也有同样的功能：正四面体是多面体家族中的一个成员，是有四个面的多面体的家族中的一个代表(见图
[145] 6). 我们用"正四面体"来命名一个形体时，我们同时就把它们置于它的家族树上，并且以有意义的方式来描述它.

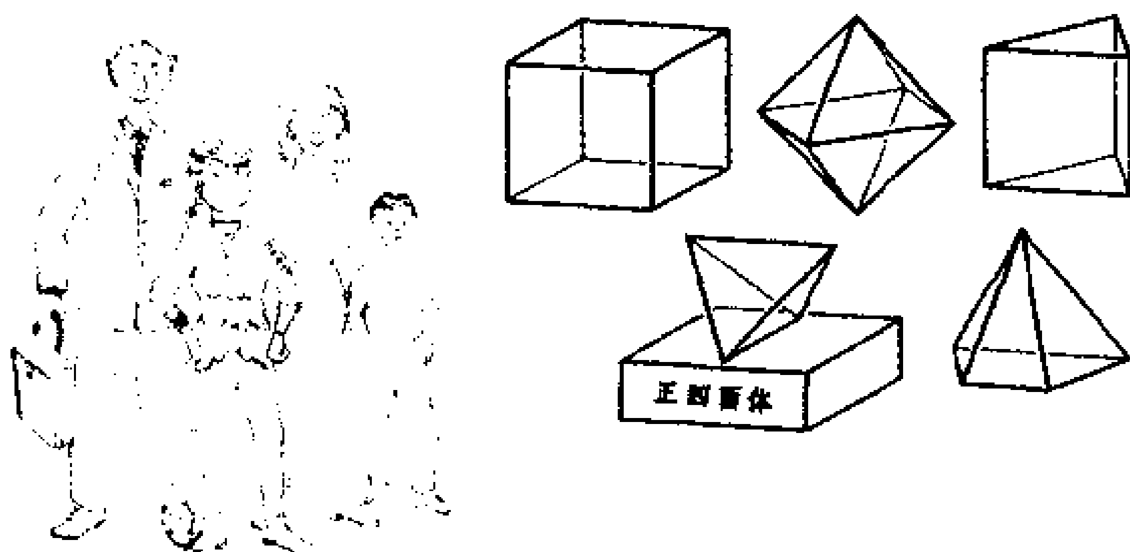


图6 玛丽·琼斯是琼斯家中的一个成员，正四面体是多面体家族的一个成员.

虽然分类要求确切，但分类形状却没有一个单一"正确"的方法.形状也用多种方式分成族和子族，依赖于使我们感兴趣的性质.例如，发现行星围绕太阳转的轨道是椭圆而不是圆，这使天文学的研究发生革命性变化.从这种观点看，圆和椭圆是完全不同的.但是古人最大成就之一就是发现不论圆和椭圆都是圆锥曲线，在这个意义下它们是一样的.

从拓扑的观点看，像球体那样封闭区域的，形状与像硬面包圈那样上面有洞的形状的区别是基本的，而在这些大类中，所有形状都一样.但是橄榄球运动员不会喜欢用篮球来踢，篮球运动员也不会用棒球来玩，因为球的每一类都有完全不同的性质.另外一个交叉分类的例子是建筑师知道建筑结实的房子而不是会倒塌的房子是重要的.这点超越了房子通常分类的方法，例如大和小，一层和多层，长方形或穹顶状的.

人的分类技巧是逐步发展起来的.很小的孩子不用正式教就能认识大量的形状，他们的世界确切说是由形体构成的.例如像碗、袋子和篮子之类盛物的形体；像球、拼图和积木等玩的形体；像椅子、汤匙和床等常用的形体.成千上万的形状成为儿童

[146] 生活的一部分.其后,孩子上学后学到其中一些形状的名称,例如圆、球、多边形以及某些简单的多面体.

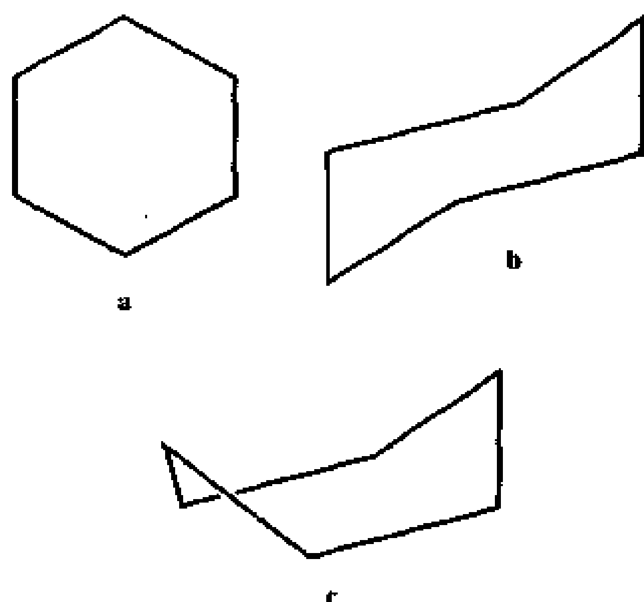


图7 在化学中重要的三个六边形,平面六边形(a)出现在苯中(见下面图30),(b)和(c)中的六边形一般不在一个平面上,两者都是环己烷的构象.由可弯曲的麦杆做成的六边形很容易取任何这种形状.

唉,在我们的学校中,通常在他们开始真正感兴趣时,也就是他们开始探索3维空间中的结构时,对形状的鉴别和分类的教学就停了下来.有多少人认识到,甚至不在一个平面上的多边形也是极为有趣和重要的?许多分子具有多边形形状,但是这些多边形往往被扭曲,它们的构象是了解它们化学性质的关键(图7).除了有限多边形以及其边不相交的多边形之外,还有锯齿形、星形和螺旋形多边形.把多边形的定义扩展到闭圈上,我们可能还要研究纽结.纽结除了明显的捆绑东西这种实用的重要性之外,它还进入网络设计,像立体交叉桥,这有助于理解某些生物分子的结构,肥皂泡、肥皂膜和泡沫也是迷人的几何原理不可穷尽的源泉.

多面体的学习可从容易画出的简单的形状扩充到像星形多

面体等比较复杂的形状．像平面铺砖之类的模式也同样重要，它们既漂亮又有用．螺旋线和螺线（蜷线）对生物学和天文学也像 [147]
数学一样根本．但是即使在今天，“双螺旋”几乎成为家喻户晓的名词时，也很少有人知道螺旋线（它在离轴一定距离上围绕一轴缠绕）与螺线的区别（图 8）．出于明显的实际理由，大多数所谓螺线形阶梯实际上是螺旋形的．想象一下要是我们的 DNA 像螺线一样缠绕我们会怎么样，或者星云的螺线变成螺旋线，我们和宇宙又会像什么！

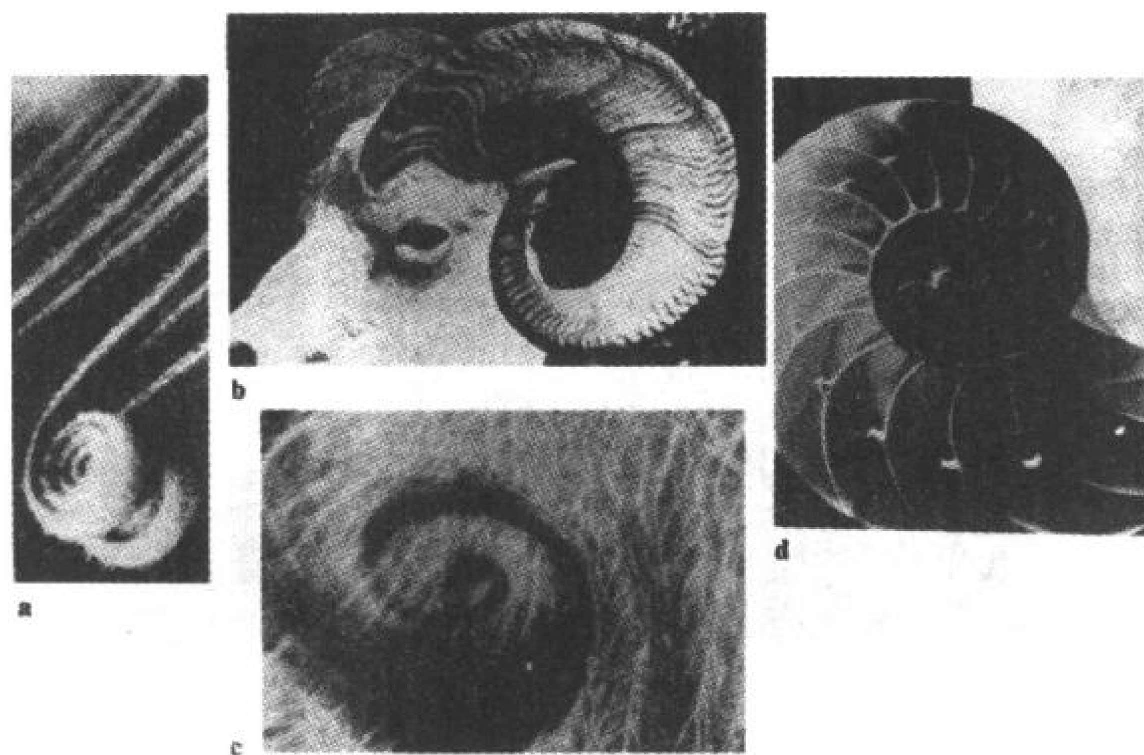


图 8　四种自然的螺旋线：(a)西谷椰子的叶子；(b)山羊角；(c)甘油同食物色料和墨一起搅拌；(d)分隔成多室的鹦鹉螺．它们共同的形状提示它们有共同的生成机制，尽管材料、尺度和自然力明显不同．

分　　析

为了对今天充满形象的世界的模式进行解释和创造，只是

识别相似性和差异是不够的，我们还需要分析它们，这就引导我们去研究大的形状如何由小的形状构成，并且认知模式以及它们的性质.

当孩子们用积木或拼图做出形状时，他们常常模仿他们在周围所见的各种各样的组合(图 9). 大自然也在创造模式，就像人造的模式一样. 自然界的模式也在多个层次上出现:原子组成分子，而分子组成晶体和细胞，而它们往往是更高级组织的亚单位.



图 9　许多形状由更小的形状构成，桥上的加强梁阐明，在工程和建筑中也像在自然界中一样，用重复的模式形成由部分构成的整体.

当我们仔细地考查模式时，我们发现同样的形式和排列，一
[148] 而再、再而三地出现，尽管涉及的对象是极为不同的.[16]这不只是一种巧合，大多数模式的几何学受到极少数几个形成、增长和发展的基本原理支配. 例如彼得·斯蒂芬斯(Peter Stevens[20])在他的令人着迷的书《自然界中的模式》中讨论了自然模式产生的几种方式. 例如加应力，分支，迂回曲折，分拆，密封，开裂. 这些形

成模式的结果十分相似，尽管它们可操作的材料多种多样(见图8).

模式生成的重要方面可以通过探索对象的拷贝集装在一起的方式来掌握. 学生们很快地发现，只有极少数方式可行. 形状的这个基本性质可以在许多层面上学习. 例如，如果要集装的对象是圆或者容易做出的多边形像三角形、四边形或六边形，它可以通过直观的或亲自动手的方式来学(图 10). 大一点的孩子可以体验不太规则的形状并发现一些惊人的事实，例如任何四边形，甚至于非凸的四边形，都能铺满平面(图 11). (这是这样一个事实，即任何四边形的内角和均为 360°的惊人的但十分简单的推论.)高中学生可以学习球堆积和铺砌的更为深刻的性质. 例如它们的对称性以及它们如何形成(格林鲍姆和舍菲尔德(Shephard)的《铺砌和模式》[10]一书是关于铺砌的材料确定的资料来源).



图 10 小孩子可以研究用多面体拼起来铺满平面的方法. [149]

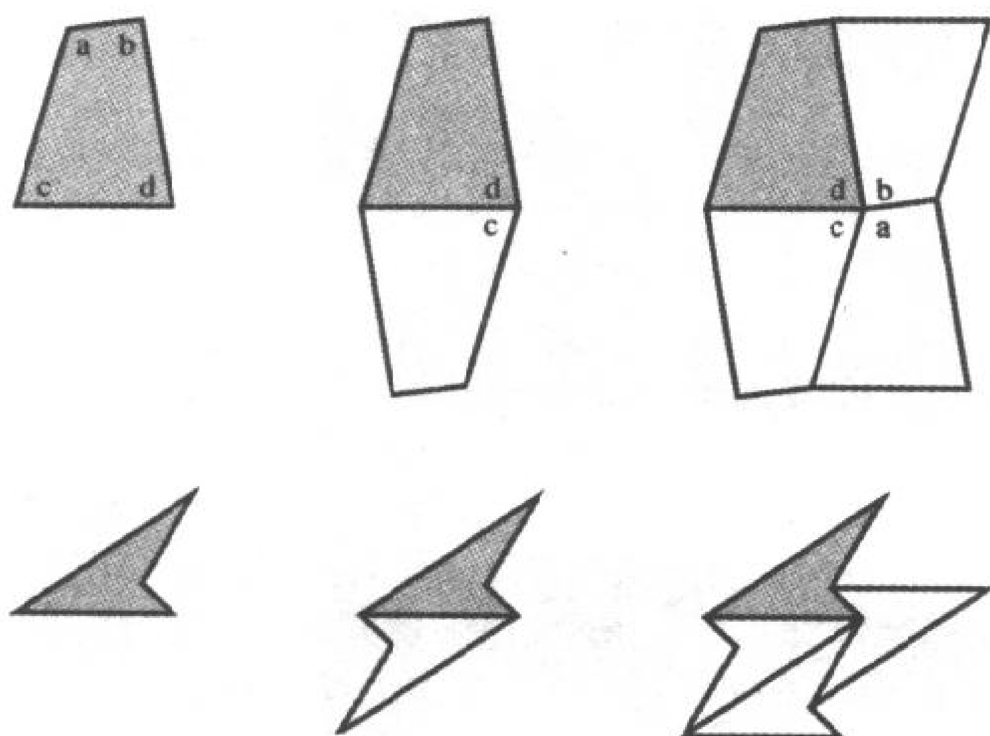


图 11 任何四边形可以铺满平面，因为内角和为 360°，这等于围绕每顶点的角的度数总和。因此围绕一个顶点排布上四个四面体每个角用一次，就正好完全拟合.

发 现 对 称 性

对于许多类的模式来讲，它们的最突出的事情之一就是它们的对称性，这种对称性也是分析模式的重要工具。模式是在某种意义下重复的某种东西，而对称性则是使其意义精确的概念.

对称性的研究开始于把图形分解成全同部分。虽然某些形状一开始并不显得是由更小的部分构成的，但如果把它们想象成这样，那往往是有好处的。例如，反射镜线把一个正方形分解成 8 个全等的部分，而这一事实则被正方形的对称性所取代。特别是，它揭示出对称性是自全等性。正是这种自全等性我们认为是漂亮的，而且使得对称性在结构分析中起着有意义的组织原理的作用.

小孩子很容易就学会认识对称性，不只是从正方形和蝴蝶

认出，而且还从各种动物、花朵、家庭用具、玩具、建筑物和陈列中认出.大一点孩子通过创造对称的模式和发现支配对称性的规则而能得到更大的快乐并获得更大的洞察力.

一种开发模式的最有趣的技术是折纸，它的作用往往被低估.我们全都熟悉当被折的纸剪开再打开所形成的美丽图案.雪 [150]
花、玩偶串以及出现的其他重复模式不是由魔术创造出来，而是反射几何学的简单结果.许多几何作图，甚至数论的某些方面(其中一些肯定是极不简单的)都能通过打开的设计来表示.反之，许多有趣的3维图形可以由折纸造出来.图2的多面体网就是一个例子，日本折纸游戏是另一个例子.折纸问题从许多方面激发几何的想象力.

镜象几何

镜子可用来学习反射原理，特别是，造一个万花筒就是极好的方法，可以去发现各种反射如何相互作用形成有序的排列，这我们称为万花筒模式.万花筒的作用远远超出一个玩具，它是镜象几何学的课本.甚至于一面镜子也能教会我们许多，成年人和孩子们都被低年级班所用的“镜面卡”困住.万花筒更为复杂，它也是基于镜面的反射原理.

为了探索简单万花筒的作用，你只需要两个长方形小镜子以及一些带颜色的小物体，一些塑料和玻璃的小碎片就非常好.沿着一边把两面镜子接在一起，让它们的反射面相互对着.把小东西放在桌子上，在两个立着的镜面之间(图12)，如果你往镜子里看，就会看到小东西以一种非常漂亮的模式重复.稍做实验，就可以表明某些角度比其他角度产生更为好看的图形.用万花筒的发明者大卫·布鲁斯特(David Brewster)爵士的话来讲，只有某些角度产生一个“完美的整体”——有限多个全同的区域排列成一个圆形的图案.孩子在玩镜子时，不难发现什么角度产生这种完美的万花筒图象.这样做，他们就会学会近代形状研

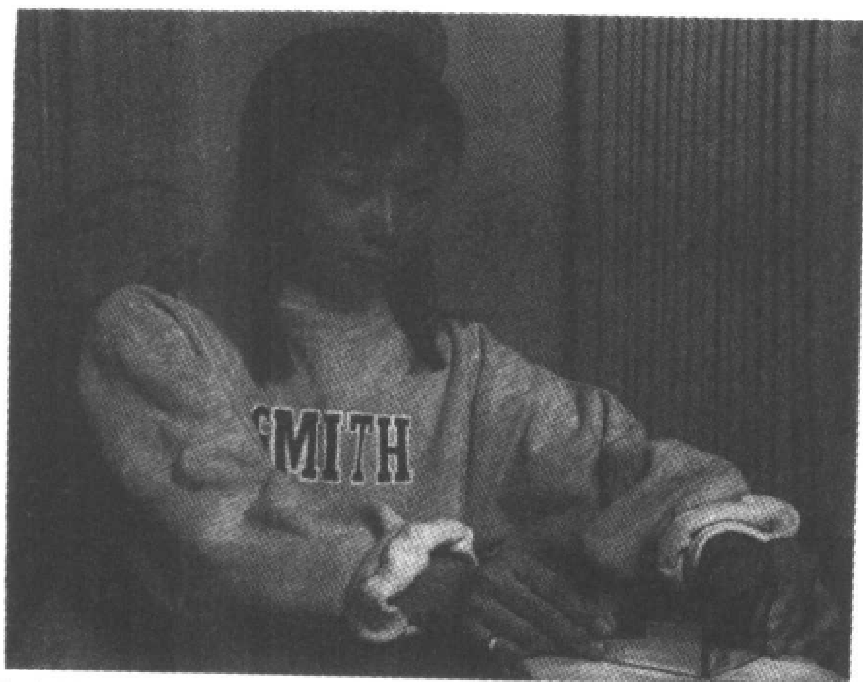


图 12　通过玩两块绞链在一起的小镜子可以发现万花筒原理.对象出现无穷多变化的图案,但是当镜子间夹角变化时,某些图案比其他的图案显示出更大的对称性和美.

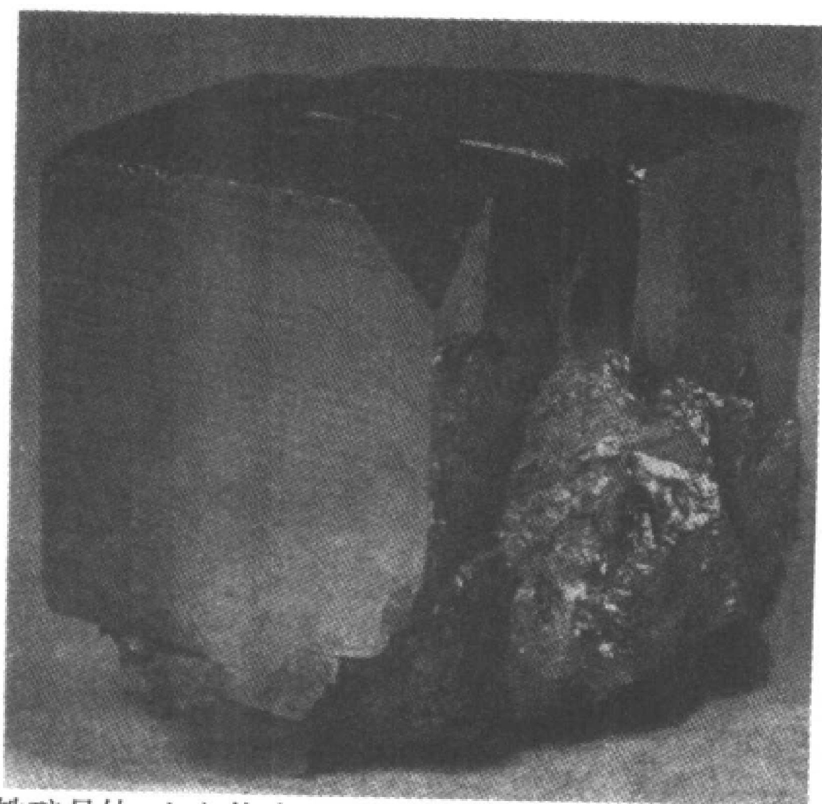


图 13　黄铁矿晶体,立方体表面上的线表明晶体的内在结构缺少立方体的某些对称性.

究的最重要一课.

反射生成具有有限多个子单元的模式,它们不仅具有镜面对称性,还具有旋转对称性.旋转和反射一个接一个地作用,常常使得"完美的整体"外观不变.正式讲,这样一个运动系统称为对称群.许多形状的性质可以通过研究其对称群来分析.实际上,经过一个多世纪,这种战略已经成为研究几何学的指导原则.学生通过使用万花筒,可以通过直接经验理解这种基本思想而不必通过通常所表示的形式的抽象代数语言兜一个长长的大圈子. [151]

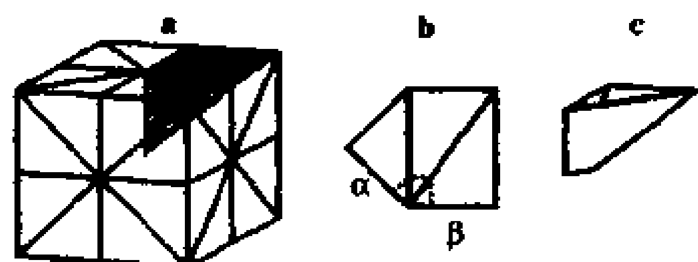


图 14 立体万花筒可以这样做,用反射平面把立方体分成四面体,在其中一个四面体上、三边的内侧放上镜子或者密拉反光纸(a),这三个面的组合如图(b)所示,它包括一个正方形的一半和一个长方形,长方形的底边等于正方形的边长,高等于正方形对角线.沿着虚线切掉,然后把边 α 和 β 粘在一起(c),令切端朝下,平行于桌面.通过四面体看一块报纸或其他装饰材料,你会看到一个装饰的立方体!沿着平面移动四面体,你会看到立方体的变化的模式.

3 维图形的对称性表面上更为复杂难解,但是其原理实际上同 2 维图形一样.例如,立方体的对称性包含对两类镜面的反射以及围绕三类轴的旋转.年轻的学生可以通过试着以同对称性相协调的方式去装饰立方体来学习大量关于立方体对称性的知识.较年长的学生可通过装饰来解决改变这种对称性的难题.

这种装饰出现在自然界中,它们给我们提供隐藏模式的结

构的线索.例如,图13中的黄铁矿晶体乍一看来是一个通常的立方体,但是仔细察看就揭示出来在立方体的面上有条纹,这些条纹同立方体的某些对称性但不是全部对称性相容.结果证明,这些条纹来源于晶体内部原子的排列并不像它外在表现出的立方体形状那么对称.结论是,黄铁矿晶体是一种有结构的立方体,或称修饰立方体.

对于较年长的学生,一个最令人激动而且有教益的实习是造一个立体万花筒.立方体由其镜面反射平面分成48个全等的四面体.如果这些四面体中有一个模型靠近镜面或像密拉那样的反光纸,去掉属于立方体空间的三角形,并且把对顶点剪掉,那么整个立方体就可以由反射生成.把反射的密拉贴在卡纸板或者硬纸板上也能用.四面体中有三个面这样做,使得你能看到里面,图14指示你如何造出这样一个万花筒.[18]

应用对称性

如果我们关于对称性所学的全部只是为了识别它,那我们就没有抓住要点.对称性是一种效果,不是一种原因.[19]为什么
[153] 许多自然界的结构是对称的?例如,什么原子力保证晶体的排列井然有序?虽然这些是深奥的,大部分尚属未解决的问题.但30多年前詹姆斯·华生(James Watson)和法朗西斯·克里克(Francis Crick)在描述他们发现DNA的结构时,给出一个讲得通的好答案:[22]

> 在分子水平上,不论何处一定大小和形状的结构,必定由更小的单元构成……,集聚的排列倾向于不断的重复,因此,亚单元很可能通过对称要素彼此关连.

换句话说,自然界建立的分子结构是按照某些规则来进行自我组织的,重复这些规则倾向于导致我们所谓对称的分子排列.

多面体提供了大量一再重复的排列的极好例子.当你用正方形硬卡片板做成正方体,每个角顶有三个正方形粘在一起,你就正在建造一个适合某种聚集排列的形状:它必须由全等的正多边形构成,在每一个角顶必须有同样数目的正多边形.我们把 [154] 这种造法推广到其他的多边形上,我们就得到五种正多面体(图1).这种排列可进一步推广以包括半正多面体(图15),其中可以用一种以上的正多面体以及凸三角多面体(图16),它的面都是等边三角形,但是其顶点的排布可能不完全一样.[17]

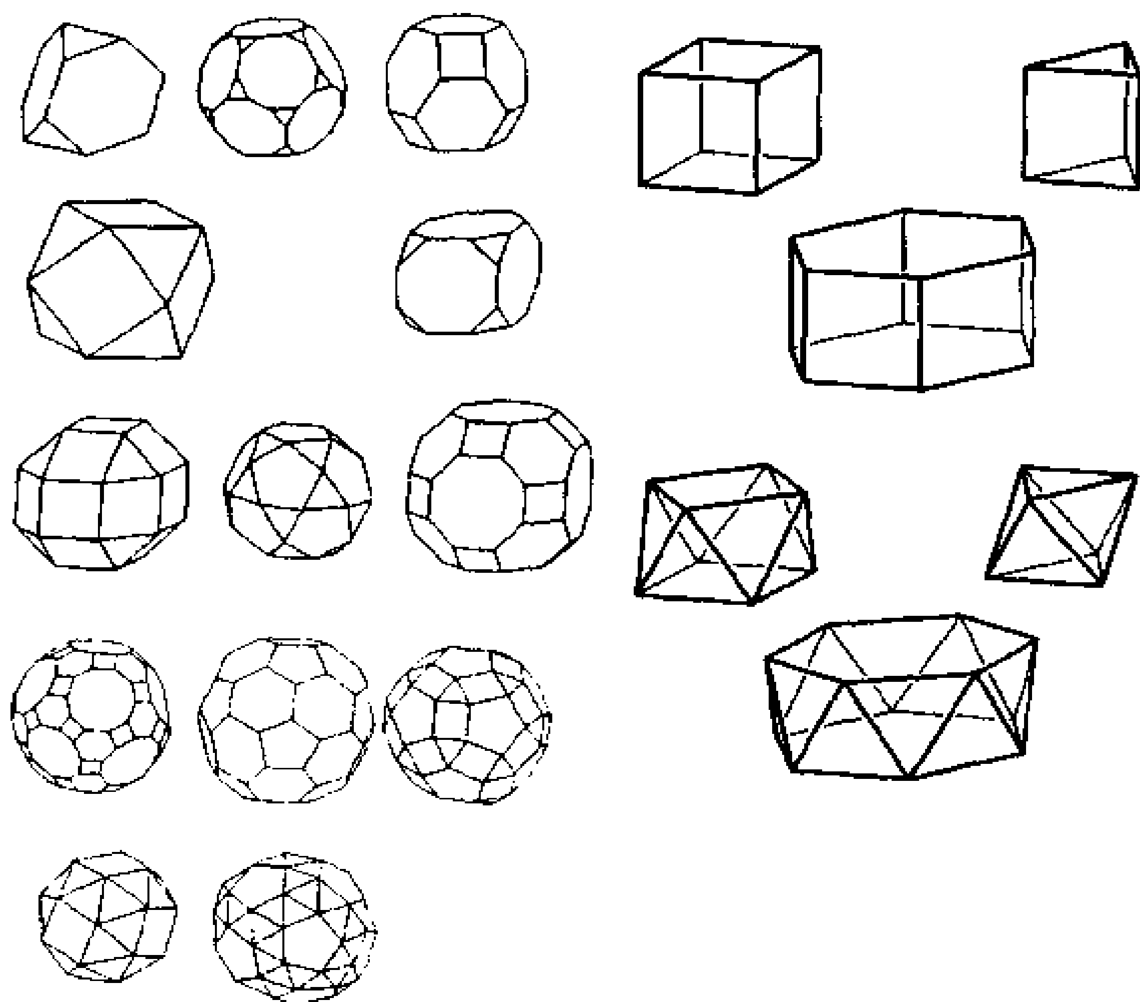


图 15 半正多面体,它们的面用几种正多边形构成,在每个顶点具有相同的排布,所有顶点可通过对称操作彼此交换.

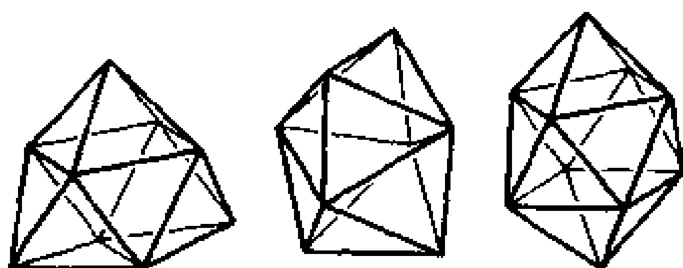


图 16 如三角多面体由等边三角形构成，但顶点排布的类型不同，在一顶点处可有 3 个、4 个或 5 个三角形相交.

生物学杂志《病毒学》的封面设计有一个 20 面体. 在病毒中发现 20 面体对称性以及科学家正在进行的把这种对称性同亚单元的结构联系起来的故事是很有教益的.[17]病毒是包含传染原的小囊，小囊由蛋白质亚单元构成，这些亚单元聚集在一起，形成一个闭壳. 华生和克里克在用 X 射线研究病毒结构的过程中，许多病毒的闭壳具有多面体或螺旋线形状. 其后的研究表明，多面体常常是 20 面体，而这就提示了关于蛋白质亚单位排列的许多吸引人的模型. 但是最近发现，这些模型并不正确，病毒中聚集排布与整体对称性之间关系仍然是一个尚未解决的问题. 像这类问题也引导数学的新发展，它们迫使数学家再考虑他们的定义并且进一步扩展他们的研究范围.

格　　子

从远古时代起，我们称为晶体的美丽形状一直使我们惊叹和称羡. 为什么它们具有多面体形状而其他自然结构却没有? 石英是最早研究的晶体，一开始它被认为是永恒冻结的冰块(英语字晶体"crystal"来自希腊字 κρισταλλος，其意为冰，这点很有教益). 到 17 世纪，科学家开始推断晶体形状是有序的、组成图案的、内在的结构的反映. 远在近代原子论发展之前，有人就提出晶体由小球堆积而成，而这些小球则表示不管是什么结构的基本粒子. 后来粒子被表示为小砖块(图 17). 球堆积和砖块(不一
[155] 定是长方形)至今仍然是晶体结构的重要模型.

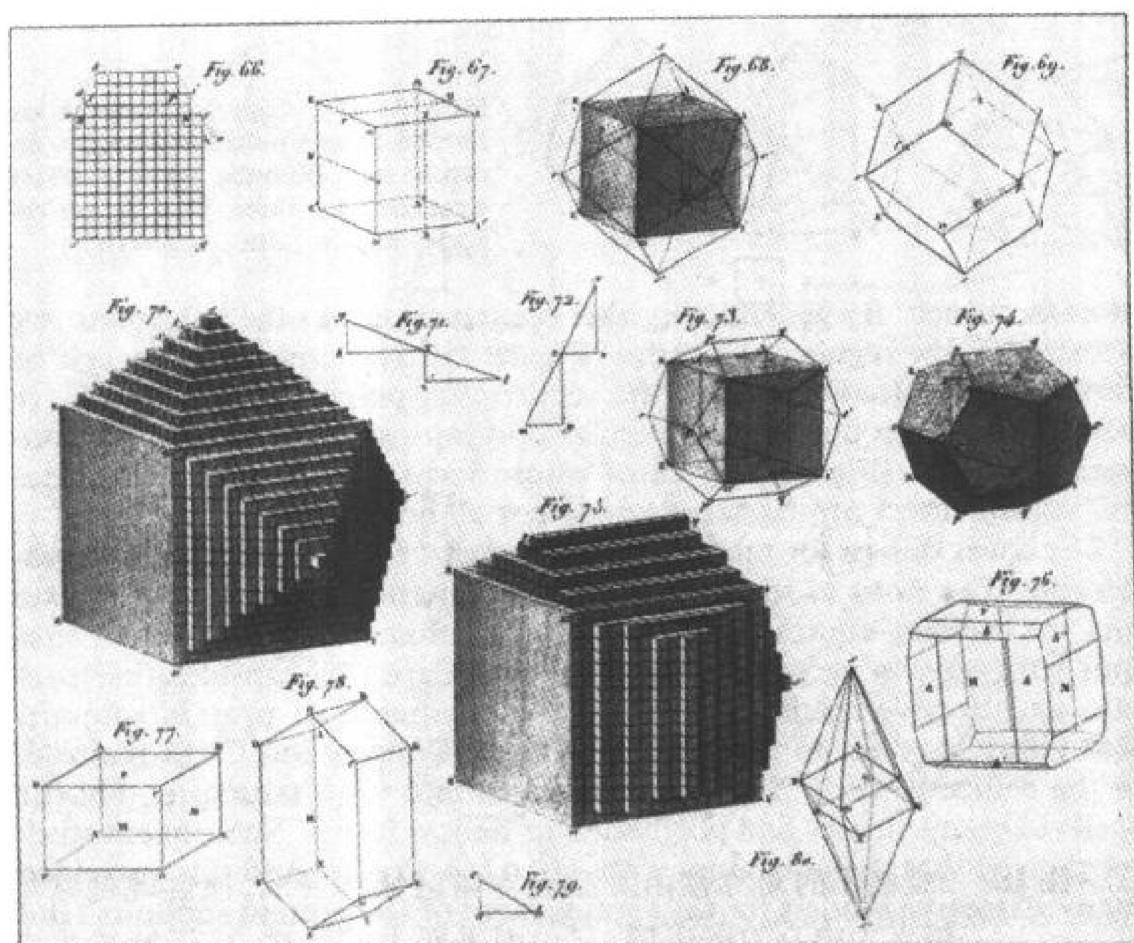


图 17　1822年一种晶体结构的概念,其中各种晶体形状被想象成为由小的长方形砖块构成.

不管我们用球还是用砖块,重要的思想是有序的陈列,让我们对此稍稍进一步探索一下. 1 维格子是沿着一条直线等距分布的点集.(虽然我们只能画点集的一部分,我们假定它不断地延续下去). 所有 1 维的格子本质上都一样,差别只在于点之间的距离. 但是 2 维格子有两个基本类:一类,每行的点都在另一行点的正上方. 另一类则各行的点有水平偏移(见图 18). 格子上每一点"占据"平面中一部分,在这个区域中,离该点要比离其他任何格点更近. 这个区称为狄利克雷(Dirichlet)区域,这些区域显示出在对应砖块模型中格子的对称性. 2 维的狄利克雷区

域——砖块——总是四边形或六边形,在每个格子之内,每一点的区域都是全等的.

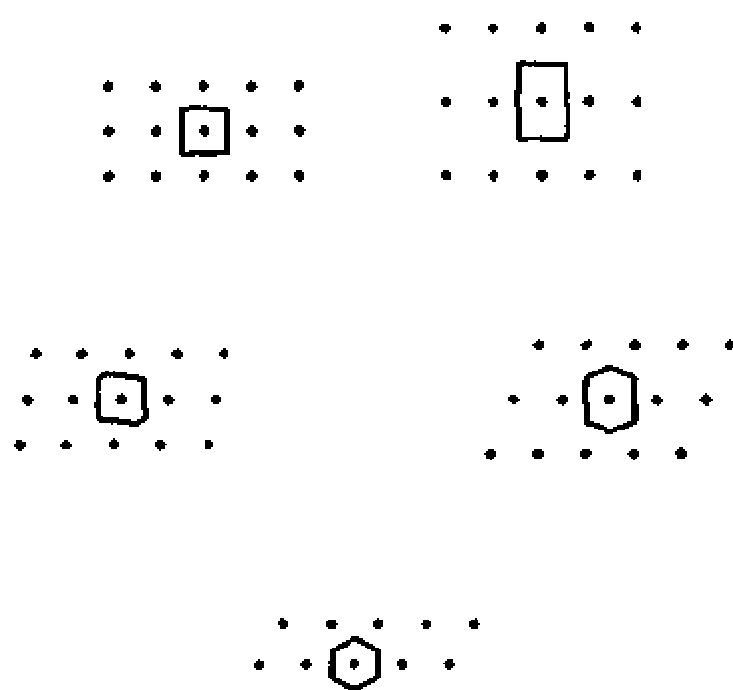


图 18　2维格子的对称性由其狄利克雷区域所展示,该区域是以每格点为中心的多边形,它包围平面上的区域,该区域离其中的格点比离任何其他格点都近.这些多边形可以是四边形或六边形,对于给定格子,它们都全等.

[156] 格子描写模式的内在基本的对称性.在两三页描图纸上画上 1 维格子,并用它们来创造 2 维格子.你很快会发现,只要移动各行的相对位置,你就可以改变格子的对称性,你可以通过重新计算狄利克雷区域来察看对称性.不管你怎么做,其对称性只是图 18 所示的五种类型之一.重要的事实是每个 2 维重复的模式,不管它是由点或椭圆或多边形的某种排布,还是壁纸图案或者埃舍尔(Escher)式的平面铺砌,都可以解释为与某一种格子相伴的狄利克雷区域的修饰,而这些格子都属于这五种对称类型.

这种简单的观察引出大量有趣的问题.如果我们用其他形状代替点,我们能创造出哪种聚集排布?什么形状可以拟合在一起,形成没有空缺的有序图案?有序到底是什么意思?把点列扩充到3维有多少可能的方式?结果对这类问题只有少数的解答.这就解释为什么在晶体结构中,在桁架中,在生物组织中,蜂房中,壁纸上,纺织品中和铺砌的地板上,同一模式如此经常地出现.

3维格子从19世纪初就被数学家和科学家用来试图解释原子在晶体中的排列.在3维情形,一共有14种对称类型和5种狄利克雷区域的组合类型(见图19).

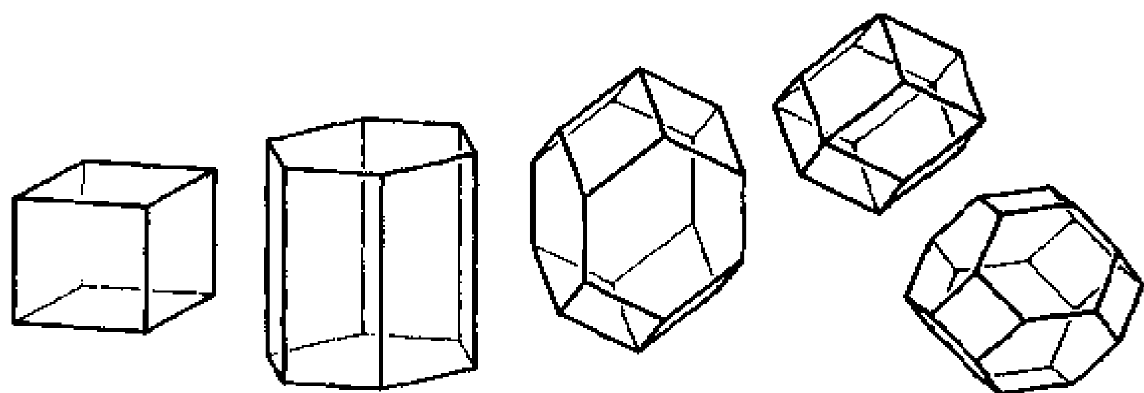


图 19 对于3维格子共有五种类型狄利克雷区域.这五种形状远不如五种柏拉图立体出名,但至少同它们一样重要.

我们很难过高估计玩立方体和其他积木块的重要性. 甚至一岁小孩子也喜欢搭越来越高的塔, 然后看它倒塌. 再大的孩子用积木建房子、庭院和其他建筑, 小孩子搭起八面体来有困 [157]
难, 但是他们能用小立方体造成大的立方体. 最小的复合立方体是由8个更小的立方体构成, 次大的复合立方体是由27个构成, 通过猜想这个数列如何继续下去, 孩子们就会对体积得到某种理解. 再大的孩子, 不管多大, 也都能从玩立方体学到许多东西.

立方体是3维砖块的原型，许多结构，不管数学的还是实际的，都建立在它的基础上．值得去尝试由立方体建造多面体．例如试图把方糖块用胶粘在一起造出正八面体，你做的糖块八面体做得越大（假如不是太乱），阶梯形的表面就越来越接近光滑，因此由立方体建造多面体是一堂复杂的体积测量课．H·S·M·考克斯特（Coxeter）在他的经典著作《正多胞形》一书[5]中，谈到任何维的立方体可作为“测量多胞形”，这是很有教益的（多胞形一词是指高维多边形和多面体）．

剖　分

许多领域中一个重要问题是如何把一个区域剖分成各种形状的分隔间．建筑师或设计师把一个建筑物内部划分为派上不同用场的房间，我们全都为如何最有效地把衣物装进手提箱或大衣箱而烦心．复杂的生物体，像植物或人都由一个单细胞发育而成．在成长的早期，它们都分裂成“女”细胞，它们又再生长和分裂．研究分裂的细胞如何组成组织，然后又形成器官，是生物
[158] 学最激动人心的前沿领域之一．一些问题涉及到剖分、划分和重分的几何学．

有许多有趣的数学问题讨论剖分，这个领域最著名的定理之一是：任何多边形都可以剖分成有限多块，并能把它们拼集成任何一个相同面积的任一多边形．小学生喜欢用七巧板或其他多边形砖块来解这个难题，你可想象给更大的孩子们能设计多少与这个剖分定理有关的、富有挑战性的问题和难题．更高年级的学生们能够发现对于多面体，相应定理是错的，这又是另一个有趣的重要结果．

另一个有趣的剖分问题是造出“复制砖”，即是把砖拼在一起，形成它们自身的仿样（图20）．换言之，我们能够通过把“复制砖”重分成和它本身相似的更小的小块拷贝来造出这种砖来，为了通过复制砖造成一个铺砌图，考虑当小砖块增长到原来大

小然后再加以重分.反复地重复这个过程,我们就创造一个铺砌,它在某种意义下是自相似的,这种铺砌许多不具有格子结构.图 20 中的铺砌是格子还是非格子?(这并不容易回答!)当 [159]
今,数学家和固态科学家对不具有格子的铺砌极感兴趣,因为它们具有许多最近发现的结晶物质——准晶所具有的奇特的性质.

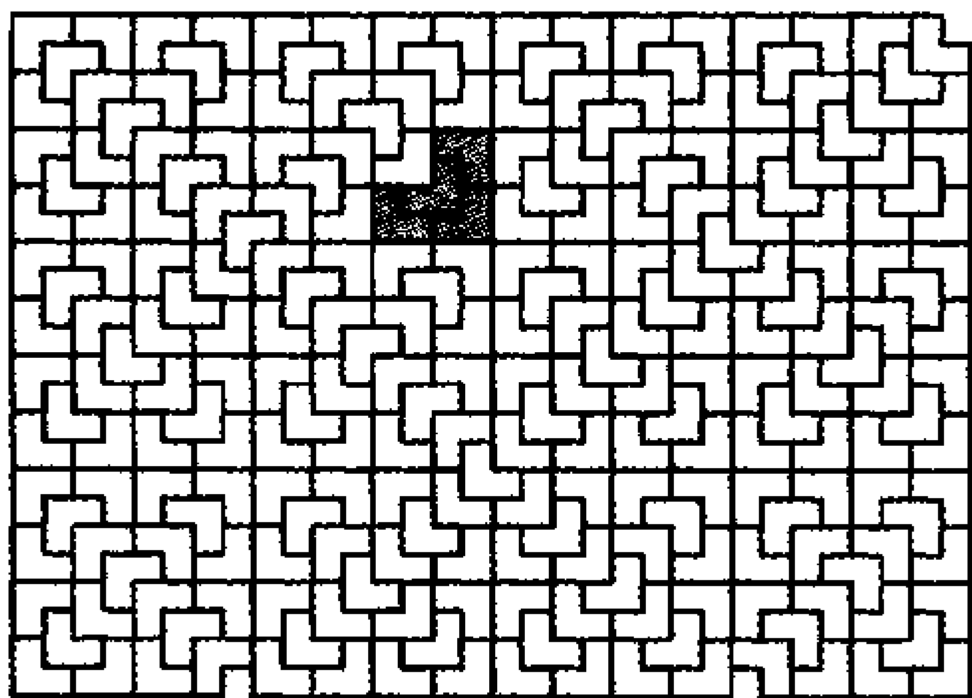


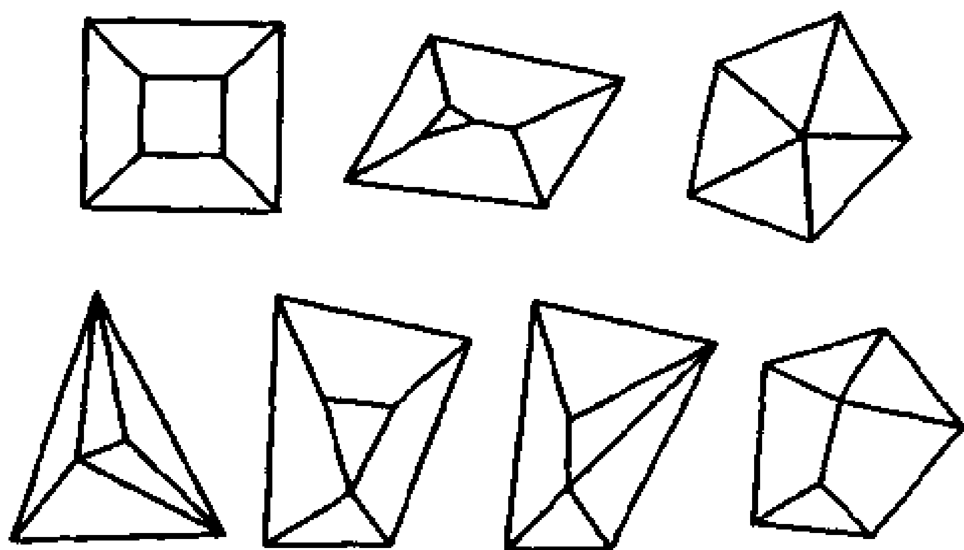
图 20 "复制砖"是把砖拼在一起、可以形成它们自身的仿样.它们形成自相似的铺砌图案,但也可能形成像本图一样的可能没有格子结构的铺砌图案.这种铺砌图案今天引起很大的兴趣,因为它们具有某些新发现的晶体物质所有的许多奇特的性质.

组合工具

模式的组合性质也非常重要,因为它们提供了什么可能存在,什么不可能存在的线索.例如,假设我们想造一个四面体,也就是具有四个面的多面体,我们应该怎样着手?在裁出多边形

并试图把它们用胶带粘接在一起之前,让我们考虑一下各种可能性.首先,所有多边形必须是三角形,因为当我们造时,我们要从一个多边形开始,并在每一条边粘上另一个多边形.如果我们头一个多边形超过三条边,那么我们就会用光了我们的多边形,因为我们只有四个多边形.因此为了造一个四面体,我们必须在头一个三角形的每一边上粘上一个三角形(图 2a),然后,为了造出一个封闭的多面体,我们必须把这个图形折起来,使得另外三个三角形交会于一点.这就意味着多面体的边必须形成四个三角形的网格.

从这里出发,我们可以讨论这些三角形可能具有的性质(例如,全等性),但重要的是要注意到我们已经做出一个重要的发现:**每一个四面体都是由四个三角形构成的组合网格**.用同样的推理可以证明,五面体(即具有五个面的多面体)有两种组合类型,你可从图 6 中找到.只有七种类型六面体(图 21),其中当然包括立方体.要求学生发现为什么没有更多的类型,对他们是个挑战.



[160] **图 21** 六面体存在七种组合类型,试着把它们当成 3 维多面体来看!

有时,形状的组合性质要比它们的度量性质更基本.要是我

们试图从六边形造出凸多面体,我们永远不可能成功.因为这种多面体从组合上是不可能的.最好事先就知道这事! 几年前,"世界运动日"的招贴画,画一个巨大的足球,看来好像是全都由六边形构成.这个设计者没有认识到,她画的是一个不可能的图形!

多面体的组合理论的基本定理是欧拉定理,它对于所有凸多面体以及某些其他多面体均成立:面数加顶点数等于棱数加2,这可简洁地写成

$$F+V=E+2,$$

其中 F 是网格中面(或胞腔)的数目,V 是顶点的数目,E 是棱的数目(用图1,6,19,27中的网格不难验证这个等式).在指导之下不难发现欧拉定理,它也容易教,对于高年级学生也不难学会用.这个定理及其推论和各种推广是列举对象的组合性质的重要工具.

表 示

研究形状第三个重要工具是*表示*.在日常生活中正如在数学、科学和艺术中,我们讨论的不只是形状本身,而且还讨论各种各样的形状的表示,像模型、摄影和绘画.表示的工具包括下面一些技能:理解尺度模型,读地图,理解阴影、截面和投影,由图象再现原来形状,精确绘图以及使用计算机图形学.在每一种情形下,基本的问题都是,决定形状和它的图象之间的关系或者同一形状的不同图象之间的关系.

模 型

形状最简单的表示是它用适当尺度造的模型.地球仪是地球或月亮或任何行星的模型.地球仪并不是地球的精密复制品,而是近似的复制品,它能很好地展示地球的某些特征.它是近似的是因为它是完美的圆球,而地球并不是.此外,它是在如此之

小的尺度上建造，以致我们最大的城市看来不过是小点．但是，
[161] 在我们这个空间时代成长的每个孩子都明白地球仪是地球的一个模型．大多数模型都在一定意义下是近似的，也就是它忽略掉某些细节，为的是更生动地表现出关键的特性．建造一个模型首先需要做出选择：要突出什么特性，这一点值得在课堂上加以讨论．

地　图

关于形状和图象之间关系的有趣的问题，比如说，就出现在研究地图的过程中．为什么我们既用地球仪也用平面图？答案很简单：它们用于不同的目的．虽然地球仪和平面地图表示同样的东西，也就是地球，但它们以十分不同的方式显示它的性质．

平面图可以非常好地表示地球上的小区域，因为球面上的一部分可以很好地被平面逼近．但当你试图增大地图所表示的区域的面积，这种表示就变得越来越差．地球仪和平面图的关系很快导致非常基本的几何问题．你不能把一张纸折起来，造成一个球面，因此，要画出平面图，你必须以某种方式把地球仪做投影．地球绘制者使用几种不同的投影方法（图 22），从而地球的地图是球面的一个近似．而当绘制的地球的那部分增大时，这种近似也变得越来越差．每一个平面地图必定使角度或面积，或两者都发生扭曲．正如数学家考虑更一般的一类地图．每位地图绘制者必须决定，对于特殊的目标来讲，要表示的那些特点是最重要的，从而达到折中的方案．

阴影和透镜

阴影可能是最常见的图象，但是它非常精妙，因为它使轮廓和大小都发生变形．有趣的问题是，确定哪种变形能够出现，为什么？

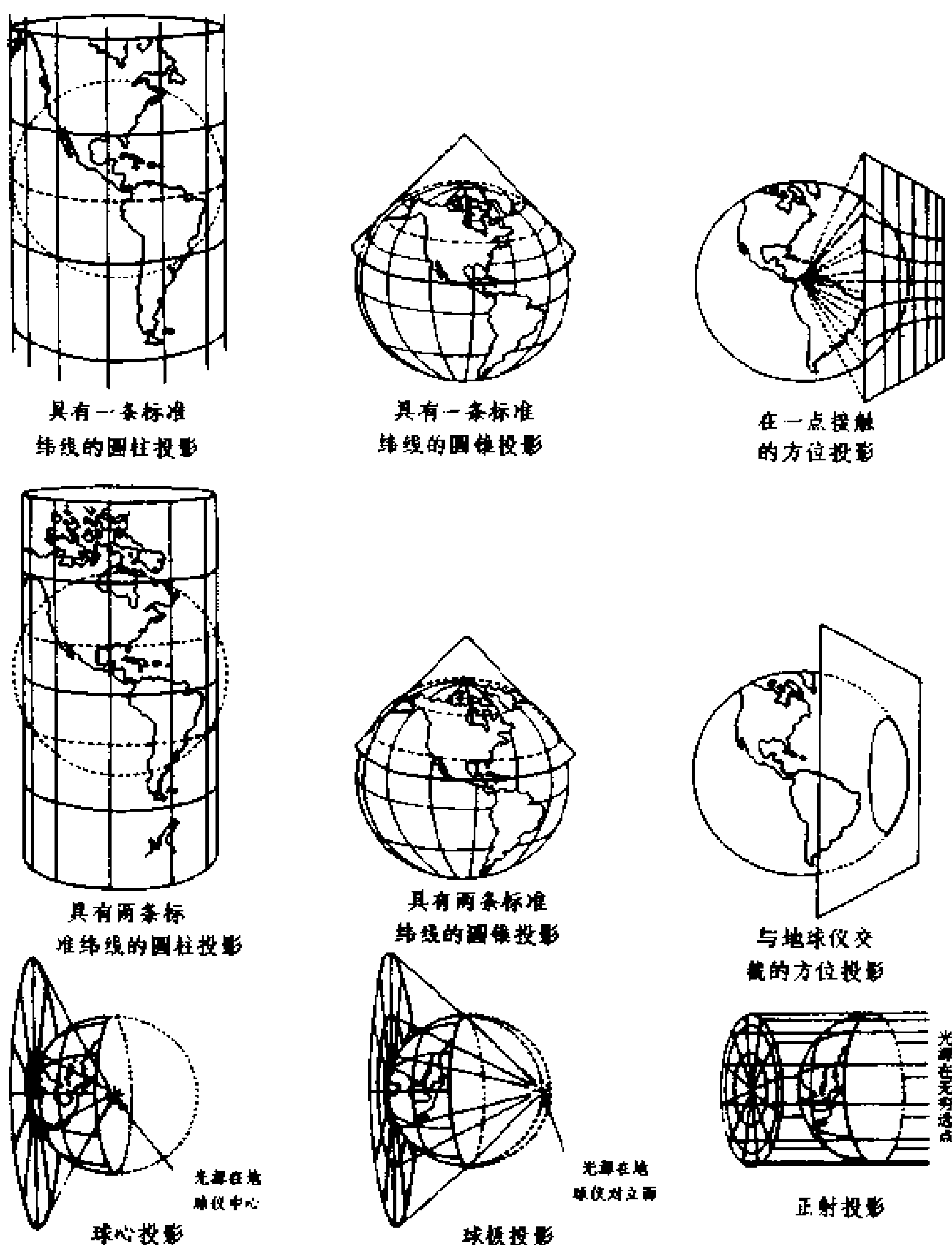


图 22 地球绘制者用不同的球面投影法来绘制平面地图，投影方法的选取决定地图的许多特点. [162]

小孩观察他们自己的阴影就能学到很多.你要造出阴影就必须有光源(如果你在户外,光源就是太阳),一个对象(你)和一个屏幕(地面或墙).阴影就是你在屏幕上的投影,而投影的形象依赖于光源、对象和屏幕的位置.年纪大的学生能够进行实验,改变光源屏幕以及阻挡光线产生阴影的对象的位置.由此,他们
[163] 就能够发现,在这种投影之下,哪些形状的性质保持不变,哪些性质失去.例如,所有圆锥曲线都可以实现为圆的投射阴影(图23).

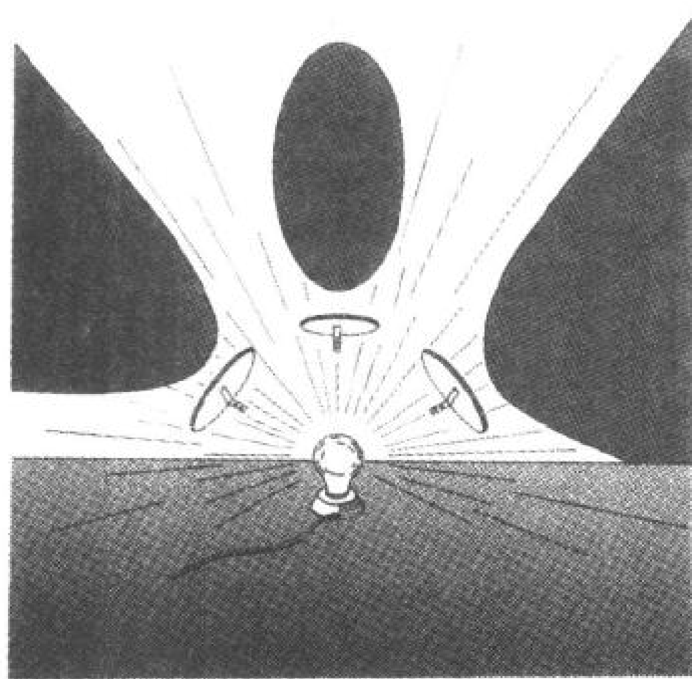


图 23 通过把圆投在不同位置的屏幕上,显示出圆、椭圆和抛物线的阴影.

在更高级的水平上,我们可以把阴影看成图象,其中只有图象的轮廓得到保持,从这个观点来看,地图和墙上的阴影的主要差别只是映照对象不同而已.

透镜也使形状变形,但是变形结果更能预测.眼镜、幻灯、望远镜、显微镜和照相机,只是使透镜进入我们生活的少数工具.实际上,我们眼睛中的透镜是我们获得视觉形象的唯一通路.对

透镜的学习涉及许多几何学原理，它们可以从幼稚园到高中乃至高等教育中各个水平上进行教学.

绘　图

每一时代，每种文化的艺术家都为了解决把 3 维形状表现在 2 维表面的问题而斗争.在许多情况下，他们得到的解决办法都和地图绘制者一样.例如图 24 中，艺术家实际上是画他眼前看到的形体的图.他用的装置很容易做出，也能用在教室里产生好的效果.透视绘画是制图的另一个例子.

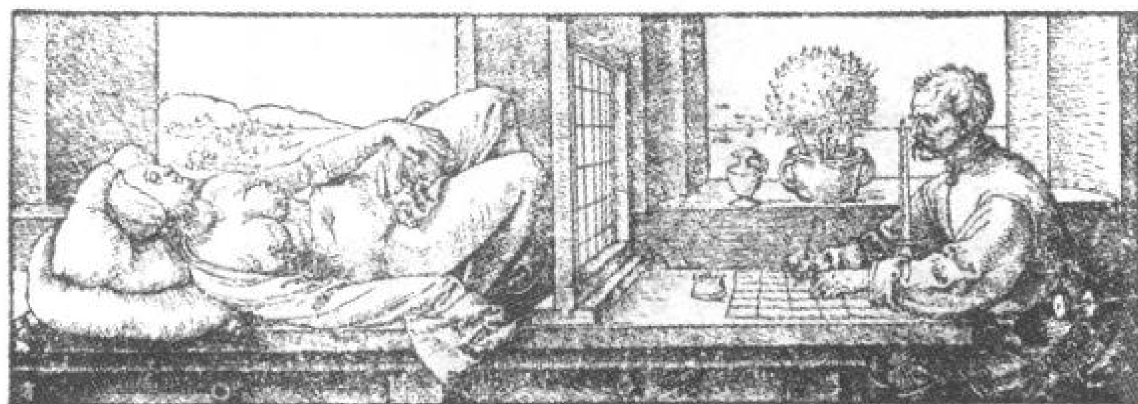


图 24　阿尔布莱希特·丢勒(Albrecht Dürer)速写，其中一位艺术家绘制他眼前看到的形体的图.





图 25　美国数学会协会的20面体标识：老的标志绘制得很差，新的标志是准确的，这个错误经历多年未被发现，你能知道哪个是错的，哪个是对的吗？（提示：在画 3 维图形在平面上的投影图时，平行线应该保持平行或者交会于单一一点.）

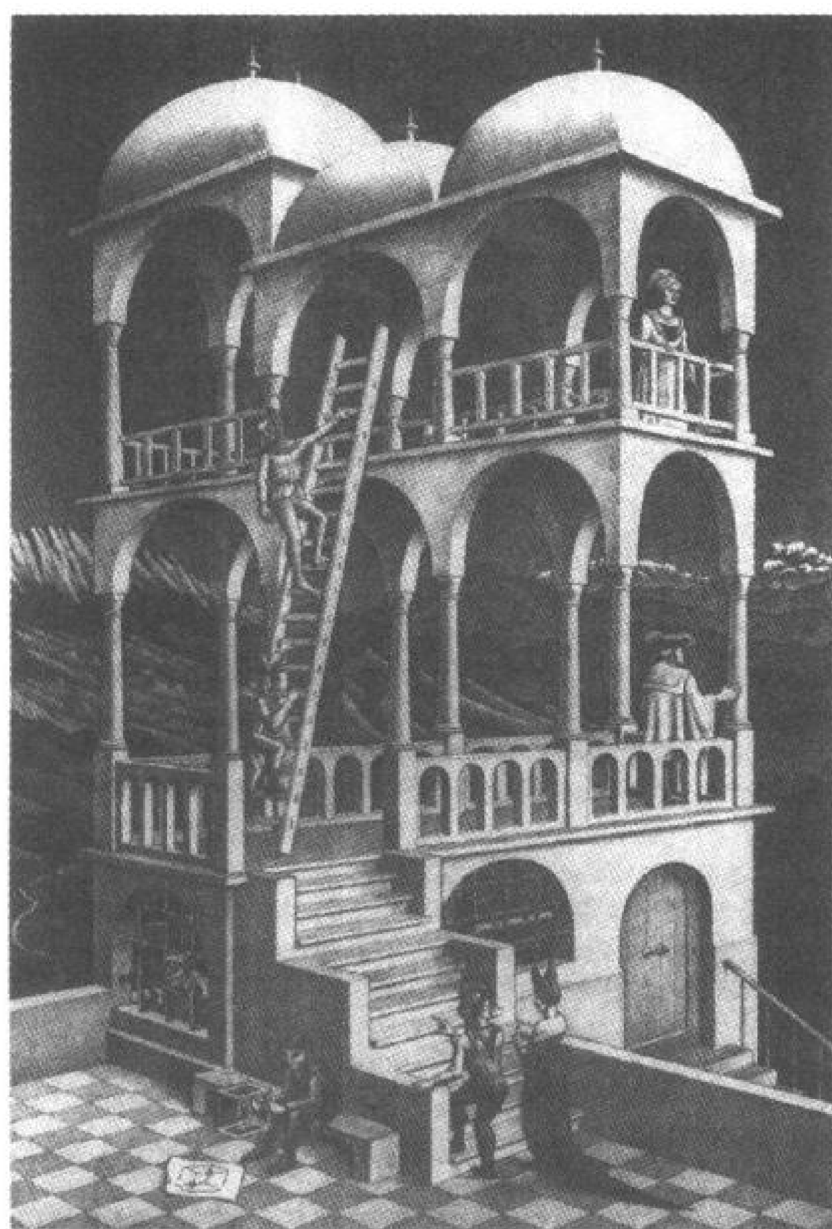


图 26 观景楼 M·C·埃舍尔画，它为把 3 维景象表现在 2 维的纸上的精妙之处提供一个视觉的注脚.

照相机普及之前，绘图广泛地用于教学．现在很少人知道如何精确地绘图，结果他们不再像过去那样仔细地观察事物．几年
[164] 之前，布兰科·格林鲍姆发现，出现在美国数学协会所有出版物上的 20 面体标识画得不精确，从而引起（或应该引起）很尴尬的局面（图 25），尽管成千位数学家经常看到它，这个误差经过多年并没有被发现．如果视觉文盲如此之多，甚至在职业数学家中

也是如此，子孙后代就有真实相信他们生活在埃舍尔式的不可能世界的风险(图 26)!

格林鲍姆在他论述关于画错的20面体的文章中还举出他收集到的教科书中画得很差的图形的一些例子(图27). 受过训练的眼睛只要看一下就足以令人啼笑皆非. 但是，我们中有多少人能做得更好呢?的确，有多少数学教师能够哪怕画一个像样的立方体?要是作者和画图的艺术家更熟悉透视和投影的原理和实践，这些出丑想必不会产生. 多年来，技术制图归到美术课或工艺美术课程中去教，而事实上，它对所有学生都是应该学会的. [165]

图象重建

如果说，艺术家的问题在于把 3 维的形状表现在平面上，那么观看者的问题就是认出图象要表现什么形状. 到画廊参观是图象重建的一种练习. 医生在审视 X 射线片以及空间科学家在解释火星表面的照片时，他们的任务也是图象重建. [166]

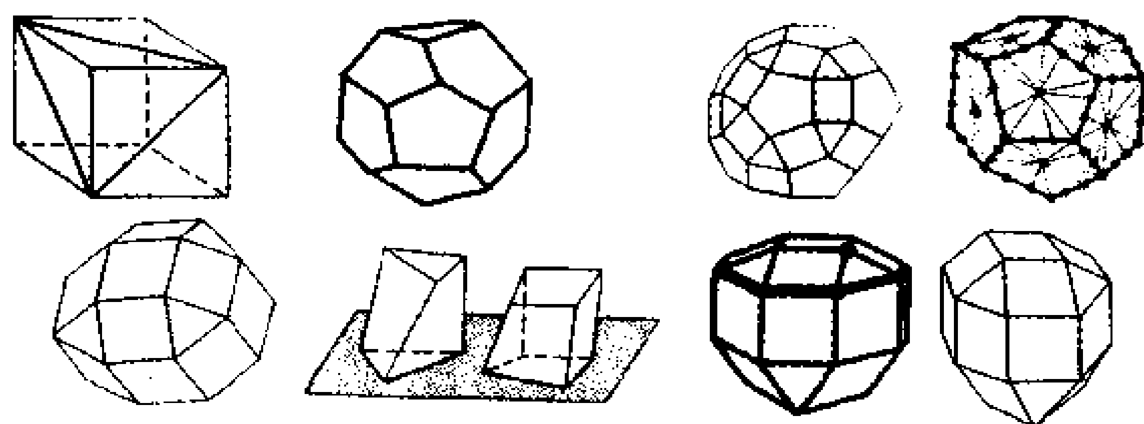


图 27 一些画得很差的图形，全都取自论述几何学及有关题材的出版著作.

绘画、X 射线片以及照片都是形状的图象，它们必须能够"倒过头来"看. 这个主题与可视化问题密切相关，对于研究形状极为重要，但是它还没整理好以在学校中应用. 这是一种挑战:

给学数学的学生提供大量关于阴影、横截面和投影的材料.除了现在已经在艺术和工艺课中教的内容之外,学生还必须学会如何判定一个投影图是否画得对,也就是是否一个图的确是3维图形的投影.他们应该学会立体视法以及为什么我们看两幅立体图看起来是3维的.

他们还应该学会从3维图形的2维表示学会推断出3维图形的对称性和拓扑性质.对于错觉和"不可能"图形进行讨论也能学到许多重要的洞察力.熟悉多面体几何性质的学生能够学到平面图的表示,并通过重建相应的3维图形来考虑他们的能力.

计算机图形学

计算机并不是真实的3维模型的代用品.计算机屏幕上的图象,甚至所谓3维(3D)图象,只有当观察者对于3维结构具有广泛的、先有的经验时才有意义.另一方面,计算机图形学的确能使学生着迷,而且使他们产生对形状的学习的强烈兴趣.因此,好的软件对于形状的学习是无价之宝,条件适当时应当使用.此外,每个人都应该知道,作为计算机图形学基础的几何学,尤其是坐标几何学,只有这样才能明智地、有选择地使用图形学软件包.

总之,创造图象以及依据图形的图象再建其图形是学习图
[167] 形的中心课题.所有有关表示的方方面面都可以在映象概念之下加以系统化。"真正的"地图只是其中一个例子,其他的例子还有:阴影、截面,从透镜看到的像,通过投影产生的像,由反射产生的像以及绘图艺术家和摄影艺术家表现的图象.通过现代技术,极大的,极小的以及以前隐藏起来看不到的,越来越精细的图象已经变得可以看见,理解映象这个广泛的概念也变成越来越紧迫的需要了.

映象是当代数学的主要课题,因为它提供了一个有用而富有启发性的方法来组织形状和模式(包括极为抽象的模式)之

间的关系．它还帮助我们，使我们的分类系统精密化．全等性和相似性也可用映象的语言来描述．例如图 3a 中的图形可以通过一个映象相互变换，它保其组合结构不变；图 3b 中的图形彼此相关，因为它们具有相同的对称性（它们是把对象映到自身的映象）的集合；图 3c 中的图形可以通过连续变形的映象彼此互变．

可 视 化

可视化是一个广泛的主题，它对我们生活的许多方面都有影响，它在全部数学中占有中心的重要地位，而且从古到今的历史中一直如此．随着计数法的发明，数学产生巨大进步，而这无非就是数的可视表示．解析几何学的发展肯定是近几百年数学的主要成就之一，它使得我们把可视的数学思想和形式的数学思想结合起来．

显然，可视化对于图形的学习十分重要，但它对整个数学也很重要．学习变化，我们需要看见它；学习数据，我们要考察各种图象表示．我们试图通过画图或造模型来抓住高维的概念．甚至数的性质也能由可视的表示来说明，这也就是数直线的用处．但是，我们直觉上知道如何"看"并不比我们直觉上知道如何游泳更多．可视化只是一个工具，必须经过培养训练才能细致地和聪明地使用它．

也许重述一下伽利略发现月球上的山和环形山的非常古老的故事是有用的．这个发现有助于永远改变我们观看宇宙以及我们在其中地位的方式．艺术史家塞缪尔·埃治通（Samuel Edgerton）解释说，"中世纪和文艺复兴时期的欧洲人遵循亚里士多德的教导，相信月亮是一个完美的球体，这不仅是可见的行星和恒星，而且也是整个宇宙的原始形状．"[6] [168]

因此问题不在于确定它的形状，这点已被普遍接受，问

题在于解释其表面的斑斑点点，只如哈里奥所说的“奇特的斑纹”．有些古代权威把斑点解释成月球表面像一面巨大的镜子，它反映了地球的陆地和海洋．另一些人则声称月球由透明物质组成，其内部更密的物质放出不同量的光．

伽利略找到另一种解释：[8]

我的观察使我产生这样的意见和信念，即月球表面不是像许多哲学家所相信的月亮（和其他天体）是光滑的、均匀的，完满的球体，而是凹凸不平的，粗糙的，充满孔洞和凸起，这很像由山脉和深谷所衬托的地球表面．

托马斯·哈里奥（Thomas Harriot）是位英国天文学家，在伽利略做出他的发现的同时，也通过望远镜观察月球．不过哈里奥的略图表明，“奇异的斑纹”他看起来不像山脉和深谷（图 28）．

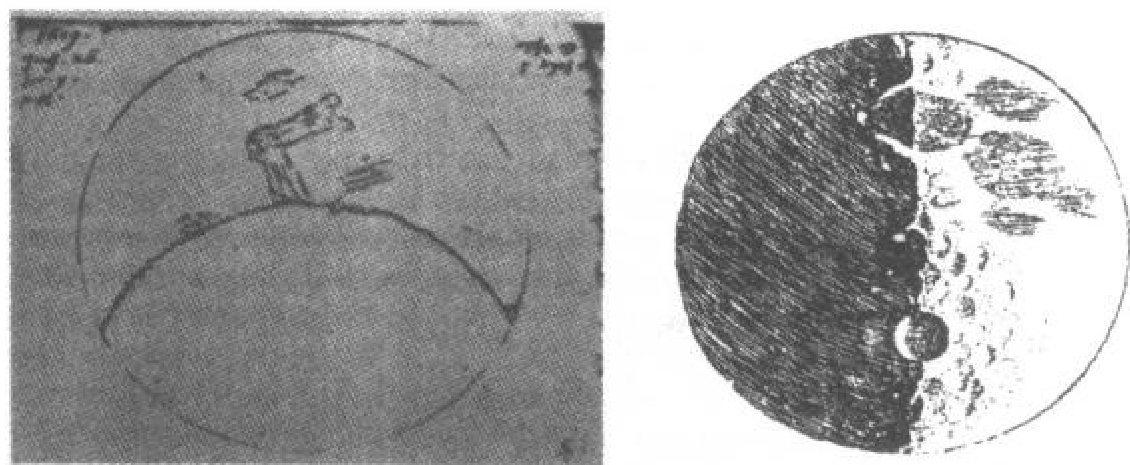


图 28 哈里奥和伽利略绘制的月球表面草图．

哈里奥和伽利略用差不多的望远镜看同样对象，怎么会没有“看”到同一东西？的确，伽利略更有天才，但只有这个事实并

不说明问题.艾治顿提出一个更可信的理由:“伽利略是有训练的艺术家,精于使用透视和明暗对照法以及描绘光和影.因此,“伽利略的确具有正确的理论框架来解月亮的‘奇怪的斑纹’之谜.他不像哈里奥,他使他的望远镜加上一份特殊的‘观看者的份额’(E·H·冈布里奇会这么说),也就是一种受过训练的眼光去‘看到’由太阳的掠射光照亮的月亮的不光滑的球.” [169]

埃治顿继续写道:“伽利略用望远镜的发现打开各地欧洲人的眼界.”正如哈里奥的笔记本所表明的,“甚至哈里奥一旦觉查到佛罗伦萨人的观察,他也‘看到’有阴影的环形山.”

今天我们观看月亮时也会看到山与谷.但是,假如我们还不知道我们设想看到的东西,我们是否会看到它们?如果我们观察由现代技术提供给我们的图象,我们又能从中“看到”什么?受过训练的“观看者的份额”现在也同伽利略的时代一样重要.

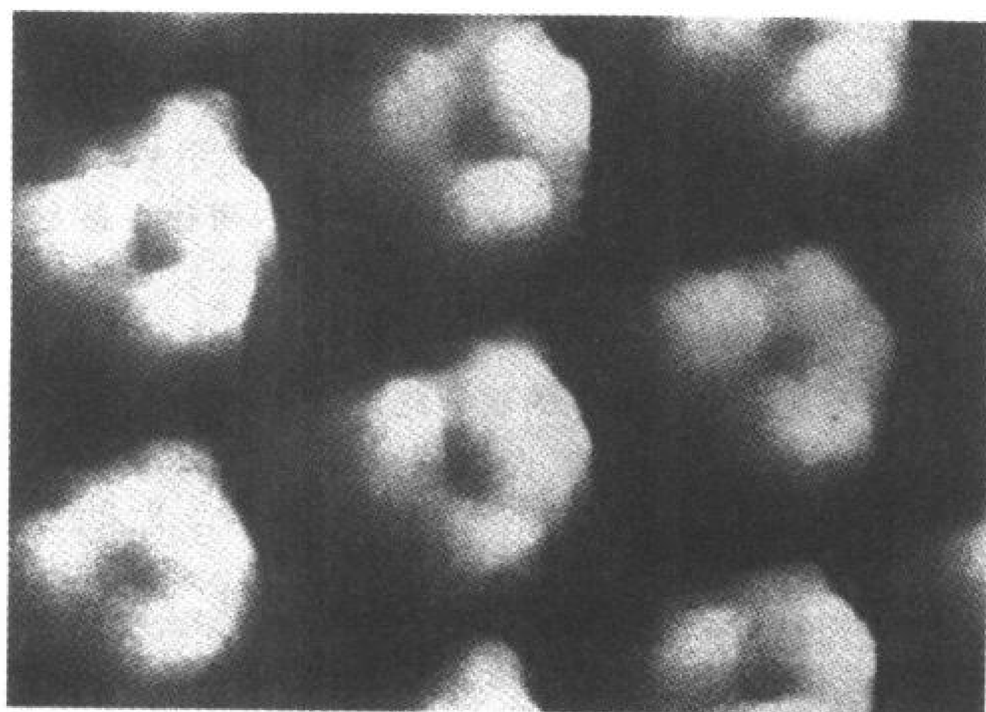


图29 1988年第一次使苯环在原子尺度上可以看见,这个像由扫描隧道显微镜产生的.受过训练的眼睛能够看到连接每个苯环中六个碳原子的原子对的电子的三角图案.

汉斯·克里斯蒂安·冯·拜尔(Hans Christian von Baeyer)在最近一期《科学》[2]中写道,"不管是通过电子显微镜观察病毒,还是用射电望远镜探索遥远的星系,或者用超声方法观察子宫中的胎儿,在原始数据被翻译成一个图象之前,必须做出理论上的假定."

冯·拜尔进一步指出这种翻译必须用受过训练的眼睛以及计算机的内部装置进行.一个所说的例子是在1988年首次产生的六角形苯环头一个原子尺度的像(图29).你能看到六边形吗?或者你能看到一些大块炸面圈?还是球面三角形?科学家能够发现六边形结构的三角形迹象,因为他们已经知道苯的结构就是那样.

鲁道夫·阿恩海姆(Rudolf Arnheim)在他的有贴切书名的
[170] 《可视思维》[1]一书中强调科学中可视化的重要性.

> 一方面在科学与技术领域中缺少视觉训练,另一方面,艺术家忽视甚至看不上这样一个美好和生气勃勃的任务,即使事实的世界对于探索的心灵变得可视.顺便说一句,这使我认为这是我们文明更严重的病症,甚至比C·P·斯诺(Snow)多年前引起公众极大注意的"文化分裂"更为危险.斯诺抱怨科学家不谈好的文学作品而作家对科学一窍不通.情形也许的确如此,但是这种抱怨只停留在表面现象上…….斯诺提出的科学和艺术的"冲突点""应该产生创造性的机会",似乎无视科学与艺术的基本血缘关系.

正如人人都谈天气一样,人人都谈可视化,但是没什么人干过多少事.可视化不是简单的事,它是一个深奥的课题,严格讲属于生理学和心理学领域,仍然没有得到很好的理解.然而,不难把形状的教学作为开发可视化能力的重要的第一步.教学生

可视化的最简单的方法是给他们提供丰富的背景知识,从许多种形状中获得亲身实践的经验.认真地学习图象重建也是在正确方向上迈出的重要一步.

课 程 问 题

学生应该学会认识形状的模式,理解支配构造模式的原理,能够在形状和它们的形象之间轻易地来回运动.虽然对于形状的学习似乎落入传统课程的裂缝当中,但全国数学教师委员会新出版的《学校数学的课程和评定标准》反映出来涌现出来的一致意见——这种局面必须有所改进.

对形状的学习必须超出它的每一部分的总和,对于形状的整体观点能帮助我们着重指出整个主题,图 30 中阐明一个可能的教学方法.

形 状 的 结 构

识别和分类

初级	中级	高级
平面多边形	锯齿形多边形和星形多边形	螺旋线;螺线;圆柱;环面;莫比乌斯带
多面体	多面体	多面体
智力游戏	用多边形铺砌平面网格	埃舍尔式铺砌简单的晶体结构
全等性;相似性		
肥皂泡	肥皂泡簇	定向;亏格结构

分　析

初级	中级	高级
镜象对称	双镜万花筒	多面体万花筒
旋转对称		
全等	有限图形的对称性	作为组织原理的对称性变换几何学
折纸;图案	剖分;智力难题	

相似性	重复砖块;分形	探索分析
	自然界的模式	生物学中的尺度
构造和解构多面体	正多面体和半正多面体	多面体的欧拉公式
直线/体积测量	角度测量	平面和3维几何学基础
做拼接被和马赛克	用多边形铺砌平面	格子,初等铺砌理论
	表示和可视化	
建造模型	**建造模型**	**建造模型**
制图,看图使用简单映象	地形图和水平曲线	3维形状的横截面结构
	地球仪	球面几何学;投影;映象
阴影	阴影几何学	图象和图象重建;不可能图形
制图	透视制图	工程制图;立体视镜
标度投影器	望远镜和显微镜	透镜几何学;照相机
	平面坐标	3维坐标
乌龟几何学	用计算机探索几何学	更多的计算机图形学

图30 与形状有关的主题体系,它显示出结构和连贯性,否则的话就像任
[172] 意一组完全不相干的主题.

建立联系

对形状进行全面思考给我们提供一个机会,使我们在形状的学习和形状在现实世界中的作用之间建立起实质性的联系.我们能认真对待阿恩海姆整合艺术与科学的主张.我们也能消灭当代技术的神秘感.电子显微镜、射电望远镜以及超声的原理并没有完全落在K-12课程范围之外.如果我们乐意的话,高中学生也能学习必要的基础,使他们能够理解这些以及其他现

代成像技术的作用.

实际上,学生集中学习形状使得他们能够比通常设想的更为容易理解现代技术的许多方面.这里有三个重要的形状的例子,它们的关键特点是能够在我们的学校中进行教学. [171]

硅芯片,就在最近一二十年,它改变了工业化世界的面貌.芯片是建立在一种结构的基础上,它是难以置信的微型电路的载体.虽然电路本身很复杂,但是安置它们的硅的晶体结构是一种非常简单的分子结构.

例如,晶体硅由相互联结的锯齿状六边形环构成(图 31),容易建造出它的模型,而且它对学习很有启发性.在硅的结构中,六边形环彼此连接形成笼状多面体,小学生也能学会建造它并认出它的子结构.初中学生能学会把这些子结构集合在一起,高中学生能学习硅的结构与使它如此有用的性质之间的关系.

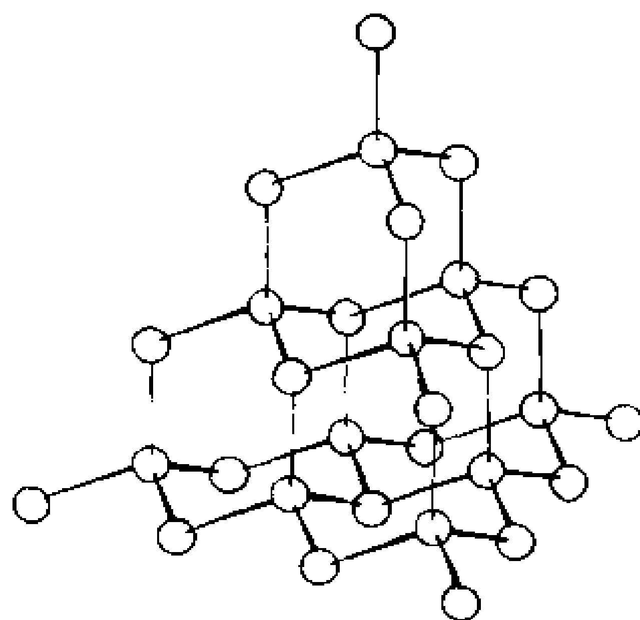


图 31 晶体硅的结构,它完全由全屈折的六边形构成,这也是金刚石的结构(只是用碳原子取代硅原子的位置).

计算机辅助成像 CAT 扫描以及其他形式的计算机辅助图象重建使得近年来医学诊断发生革命性的变化.如果说通过 X 射线诊断是观察阴影的实习,那么通过 CAT 扫描进行诊断则是由其截面来重建图象的实习.正如硅片上的线路一样,在这种技术中所使用的图象重建是一个复杂的操作过程,但是它所根据的最简单的几何学原理却是很容易懂的.

这里我们再次发现,同样的几何学原理在许多领域中都处于中心的地位.例如从截面和阴影建造原来形状已经是几个世经以来建筑师和施工者的任务.虽然把 CAT 扫描机或者建筑工地搬到教室来并不可行,但是适用于学校的许多计划可以帮助学生理解阴影或截面与形状之间的关系.

雪花,特别是羽毛状的雪花,令人迷醉.孩子们常常在学校
[173] 学做纸雪花,这种练习能很容易进一步扩大成对雪花的对称性的学习.雪花的六边形对称性提供了多边形对称性的导引,它是小学课堂中的理想课题.

但是雪花还能教会我们更多东西.首先,雪花看起来像我们在万花筒中可能看到的模式,而且的确如此,这就提示我们去研究万花筒.它正如我们以前见到的是镜面几何学原理的应用.这些反射原理同样也是现代技术的基础:我们只要想一下防盗报警器和激光中或者雷达和声纳中的反射线就够了.中学学生能够很容易理解并认出这种应用.在高中水平可以探索由于水分子的聚集出现六边形的对称性以及晶体中的树枝状生长或分支.

雪花的分支也像它的对称性一样是它的特征,而且在研究形状时,分支也同样具有意义.首先,雪花各角顶从六边形的"核心"萌发出来.其次,这些分支本身又萌发分支,分支的分支再分支,如此下去(图 32).结果形成一个结构,其中每一个特征——分支——在越来越小的尺度上不断重复.如果这个过程无限制地重复下去,结果就形成自相似的结构.实际上,在雪花发展的

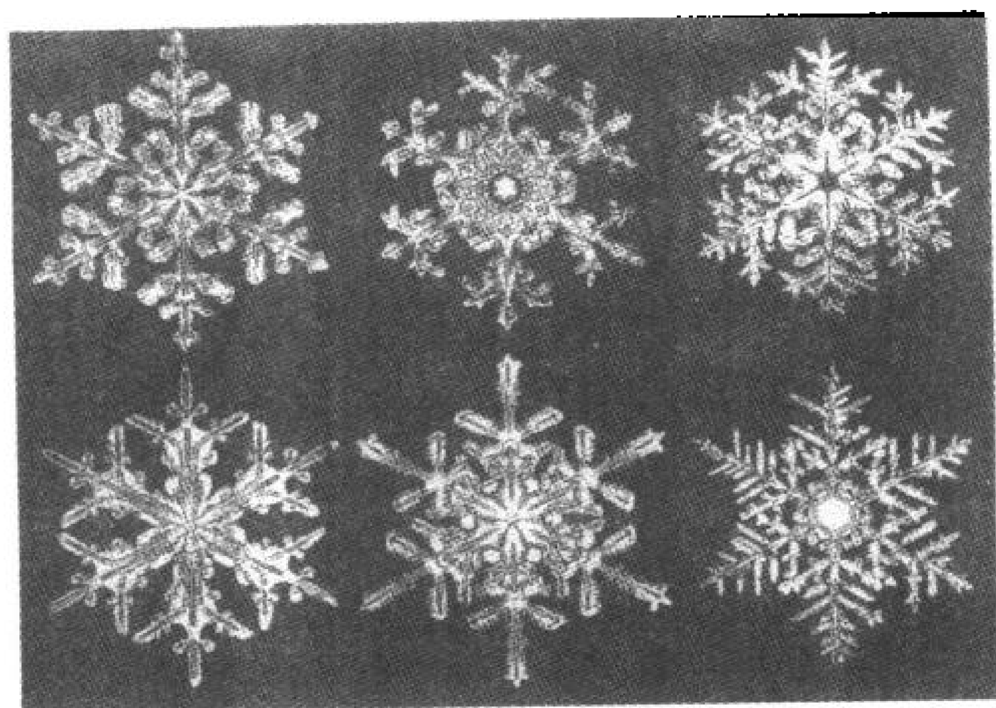


图 32 分支的雪花揭示出冰晶体常见的六角形对称,它在每尺度上像分形一样重复. [174]

早期阶段就是一个分形.

几 何 学

从小学到研究生院各级的数学教育中,几何学的作用是反复不断地争论课题.多年以来,几何学一直是数学课程中难处理的问题.看一下全国数学教师委员会的 1987 年年报《几何学的教与学》,[14]就可以提出许多有关问题中的某些问题.几何学带来的问题部分是由于对"什么是几何学"以及"为什么我们应该学几何学"缺乏一致意见.我们学习几何学是为了学会受过训练的思维吗? 还是为其他学科做准备? 还是因为这学科本身具有重要的内容?

大多数高中几何学教科书的确指出在自然界,在科学和技术领域以及在艺术中几何形式的例子,尽管对这些联系几乎没

有做出任何稍微深入的探讨.方法和内容的综合通常并不成功.我们的几何学课程是在许多重要但是极为不同的目标之间达到困难的妥协的结果.这些目标包括,教导演绎推理,证明欧几里得的定理,引进问题的解法,教导可视化以及给学生将来上微积分课做准备.不断的争论表明,在当前情况下,这些目标没有一个得到很好的满足.

在几乎所有争论中,维护几何学教学的根据是,它满足外部的需要而不是学科本身有什么重要性.例如,最近论相似性的一篇论文[7]中,通过下面的理由论证相似性教学的合理性:

> 在学校的许多课程中都包括相似性的思想.有理数概念的一些模型是基于相似性;因此,学生学有理数的困难部分可能来自相似性概念的问题.至少从七年级起,比和比例就是学校课程的一部分,它们给学生带来很多困难.标准化测验中包含许多有关比例的文字题.用口语表达(a:b=c:d)构成许多智力测验的一部分.相似的几何形似乎给其他类型的比例类比的情况提供了一个有帮助的直观形象.

所有这些理由都正确,但是其中忽略了重要一点:教相似性的主要理由肯定应该是,它在理解形状方面具有深刻的重要性.

同时,在课堂之外,计算机革命正迅速改变着我们所生活的世界.这些变化对课程提出新的要求,这些要求现在正开始在学校中听到.在学习形状和形式方面的革命使得我们可能通过计算机提出:我们所需要的不是只对几何学寻求一个更好的妥协,而是一个全新而且连贯系统的数学课程,它把形状纳入整个学
[175] 习过程当中.

欧几里得留下来还是滚蛋?这不是个有用的问题.我们需要换一种问法:我们想让我们的学生知道什么以及为什么.欧几

里得使我们认识到，对于形状的细致的推理要求精心的陈述定义和假设，以及非常仔细的论证．为了能分析形状，学生必须知道如何去测量长度、面积和体积以及平面角和二面角，他们需要知道平行线和垂直线的性质，关于角的基本定理以及图形的基本性质．此外，他们需要知道，如何用直尺圆规做出标准的图形，例如等边三角形，正六边形以及正方形．

因此，对形状的学习与传统的几何学课程有所重叠，但是它不能从属于它，以成为一个简单的组成部分或者课外活动．今天学生们必须理解的形状以及他们能够用形状来处理的事物实在是太多太多，以致无法用一个课题来完全概括．此外，在重点和目标上也存在相当大的差别．

传统几何学不只教给我们古典文明的历史根源，它在学校中的作用在某些方面类似于古典语言对现代语言的课程争论．学拉丁语和希腊语的学生学会严密的思想以及一些重要的历史知识，还获得了学习许多现代语言，包括我们自己语言的基础．另一方面，现代语言不那么严密，然而讲起来更流利，它们是人们在日常生活中真正使用的、活生生的、灵活的语言．最理想的是，学生应该既学会古典语言又学会现代语言，虽然只有少数人有时间或机会都去学习．一个简易的拉丁语课程，虽然用同一语族的意大利语、西班牙语或法语的字使之生动活泼，但也不是解决问题的方法．

古典欧氏几何也具有拉丁语和希腊语的所有优点．经历 2000 多年之后，欧几里得的《几何原本》不仅作为几何学的基石，而且还是数学思维的典范．从公理出发的演绎推理十分富有成果．不仅对于数学，对于科学和哲学来说也是如此．例如，正是由于欧几里得公理，而不是对现实世界的观察所提出来的问题，导致非欧几何学的发现，它后来成为研究宇宙大尺度结构的基本工具．古典几何学没有失掉其价值，但是其他的需要要求我们，也要把相当于现代语言课程的近代数学内容引进我们的课程．

形 的 学 习

形状是一个横跨数学和科学许多部分的主题，它提供大量
[176] 的、各种各样的可能性使我们能进行富有想象力和探索性的教育——从建造模型到使用计算机，从观察到实验，从操作到计算．形状有非凡的潜力使我们能多方面地提高数学教学的质量．

形的学习是跨学科的　正如我们已经注意到的，形在其中起作用的许多学科通常并不看成是在狭窄或局限意义下的数学．例如，关于大小和尺度的问题并不是完全属于数学．由它们导致的各种问题使我们得上图书馆或找其他系的同事．例如，巨人能否存在？人是否能够小得像耗子？我们的神话表明这些问题比我们有记录的历史还要古老，答案不是相似性的直接应用．假如巨人的腿与我们的腿精确相似，那么巨人就无法用他的腿来支撑，而且骨骼质量必须不成比例地增大，这种复杂性比起一个简单答案来，使得我们对生物尺度的研究更为着迷．

透视是在艺术课上学的，几何光学是物理学的一个分支；相似性和其他变换是生物学中心概念；化学家用多边形和多面体建造分子结构的模型．甚至在数学之内，形也是跨学科的：它要求视觉的和计算的技能，逻辑的思维以及许多其他工具．以一种系统的、有意义的方法进行形的教学能够激发许多学科的教师密切合作．

对形的学习提出横跨几个课题的计划．例如相似性的学习能够很好地由透镜的学习所补充，而关于透镜的学习要求对物理学进行一次涉猎．甚至于许多几何光学定律所冠的人名(例如费尔马原理)也可以证明，现在学科的界限并非总是那么分明．这只是因为我们到处都发现同样的形状．我们必须在许多不同的学科背景之下，把它作为数学的一部分来学习．

形的学习是实验室的课题　不管是孩子还是成人，我们都通过建造形体和研究模型来学习形(图 33). 正如古谚所讲："听过就忘，看到才记得，只有做才能明白."

假如我们希望建造一个形体(立方体、房屋模型、有尖的星形多面体)，我们必须能够截出大小确定的部件并把它们集装起来. 这就是基础几何学(角度、平行线等等)仍然是不可或缺的理 [177]
由之一. 从这个非常具体的意义下来讲，建造模型是把理论和实践统一的最好办法.

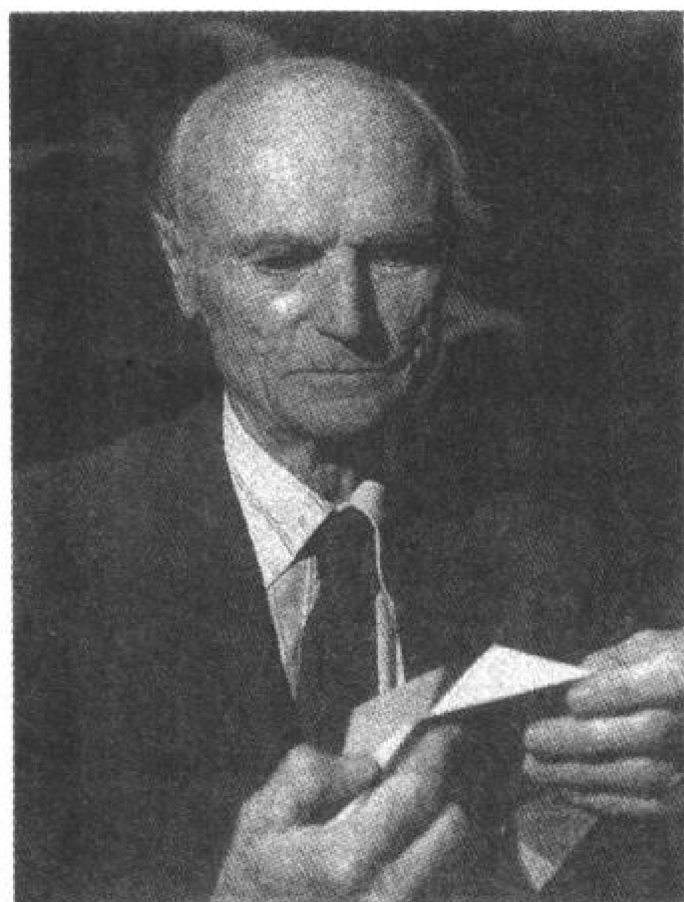


图 33　著名的几何学家 H·S·M·考克斯特正研究一个模型，考克斯特把一生献给发现形体中的模式的事业.

亲自参加的实验是必不可少的. 例如我们亲手制做一个立



方体,我们就对它的度量性质、组合性质、稳定性质比只看一下要获得远远多的洞察力.如果我们不用正方形硬纸板来造立方体,而是用塑料管插在果浆软糖上,这个立方体就摇摇晃晃,这个立方体虽然不太漂亮,但是这个摇摇晃晃的立方体并不是一个“坏”模型.正好相反,它是一个有用的模型,因为它教导我们许多关于刚性和可弯曲性的许多性质,它还教导我们一些可由立方体变换成的图形的性质,这些图形仍然保持着立方体的组合结构.

似乎每个人都同意模型和“手工操作”是课堂中的有价值的工具.但是,我们常常听到这样的悲叹,“只要模型引进得足够早,我们就不会以后非得使用它们”.这种可叹的态度暗藏着两个隐含的,但是极为不确切的假设.第一个是,粗陋形态的形状是我们从模型中学到的主要东西,它完全可以在小学学习.假如你看到一个立方体(一次),你就对它们全都明白了,这当然很荒唐;哪怕一个不怎么好的立方体模型,也在学习体积、全等、对称性和尺度结构上起着关键的作用.

第二个假定是用模型学习的主要目的是发展我们抽象思维
[178] 的能力,这里模型起着自行车上后轮的作用.我们肯定希望我们的学生理解这个意思:一个特殊的立方体代表立方体的一般概念,但是,一旦明白了这点,我们大多数仍然还能从真实模型中学到很多东西.

理想地讲,形应该在实验室的背景中来教,至少每所学校也应该有一个实验室,使学生能在其中探索形体.形体实验室应该包括工作台,绘图和制作装置,许多种的3维模型,制做模型的材料以及演示它们的地方.如果可能的话,实验室还应该包括具有绘图功能的计算机.应该用工作手册,设计材料以及互动的计算机图形学程序来补充教科书的不足.

形的学习是为每个人的 常听人讲,形的学习对学习很慢

的人是理想的.的确对于公理的抽象感到困难的学生会感到能亲自动手的、面向解决问题的图形课程不那么困难,也更加有意义.这个误解来自另一个方面的错误——人们普遍认为更高级的学生没有必要研究形.

证明这种信念有多愚蠢的例子,我们不用看远的,只要看看当今报纸就能找到.最近《纽约时报》在头版的一篇文章的大标题这么宣告:"超级计算机的图形解决了一度不可解的问题."[13]

> 现在正在使用新的超级计算机图形学的科学家说,通过观看形象而不是数,研究者思考和工作的方式正在发生根本性的改变.一位洛杉矶国家实验室的物理学家汉茨-卡尔·温克勒(Heinz-Karl Winkler)说:"人脑是历史上最佳的模式组织者,我们能用它们直观地扫描大量数据,我们能把注意力集中在形象中的某个结构上,并能区别开重要的和不重要的事."

正是我们的最好的学生而不是最差的学生会使用超级计算机来研究数据的形状和科学的图象,要是他们根本没有学过结构的话,他们怎么会能区别结构中的重要的和不重要的事呢?

形的学习很有趣　学生们和我们大家都一样,对摆弄和探究形状都很感兴趣.教师在对形进行教学时,特别是在工作室的环境中,他不大会碰到有时在几何学课程上所出现的缺少引导学生学习的动机以及碰到的阻力和困难.遗憾的是,在某些教育界的人士中对这种趣味性表示怀疑.为了回答关于探索形体有什么教育价值的问题,一个最有效的方法是在形体实验室中保留一间开放的房间,使得这些抱怀疑态度的人通过自己直接搬弄这些材料而逐渐改变他们的信念. [179]

形的学习永无止境　在我们这个迅速变化的时代，对形的学习使永无止境的学习战略更为方便有效．例如，计算机图形学使形状的学习发生革命性变化，正如超级计算机正在改变着研究的方式，普遍的计算机正在提供着十年前大多数人根本不能想象的图象．

许多教师都谈到，计算机软件完全改变他们教学的方式．他们不再感到，他们必须掌握全部答案，而是变为学生在探究图形的性质时的伙伴．这些教师对他们的新教学方法充满了热情．通过把对图形的探究贯穿在整个课程当中．这种富有想象力的课程，他们的热情和这种新的“伙伴关系教育法”都能被大大地鼓动起来．

参考文献和推荐读物

1. Arnheim, R. *Visual Thinking*. Berkeley, CA: University of California Press, 1969.
2. von Baeyer, H.C. "A dream come true." *The Sciences* (New York Academy of Sciences), (Jan. – Feb. 1989), 6 – 8.
3. Berger, Marcel. *Geometry*. New York, NY: Springer-Verlag, 1987.
4. Coxeter, H.S.M. *Introduction to Geometry*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1969.
5. Coxeter, H. S. M. *Regular Polytopes*. New York, NY: Dover, 1973.
6. Edgerton, Samuel Y., Jr. "Galileo, Florentine 'Disegno,' and the 'Strange Spottednesse' of the Moon." *Art Journal*, 44 (1984), 225 – 232.
7. Friedlander, Alex and Lappan, Glenda. "Similarity: Investigations at the Middle Grade Level." *Learning and Teaching*

Geometry, K - 12. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1987, 136 - 143.

8. Galileo. *Sidereus Nuncius (The Starry Messenger)*, 1610.
9. Gombrich, E. H. *The Sense of Order*. Ithaca, NY: Cornell University Press, 1979.
10. Grünbaum, Branko and Shephard, G. S. *Tilings and Patterns*. New York, NY: W. H. Freeman, 1987.
11. Grünbaum, Branko. "Geometry strikes again." *Mathematics Magazine*, 58:1 (1985), 12 - 18.
12. Holden, Alan. *Orderly Tangles*. New York, NY: Columbia University Press, 1983.
13. Markoff, John. "Supercomputer pictures solve the once insoluble." *The New York Times* (Oct. 30, 1988), 1, 26.
14. National Council of Teachers of Mathematics. *Learning and Teaching Geometry, K - 12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1987.
15. National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.
16. Senechal, Marjorie and Fleck, George. *Patterns of Symmetry*. Amherst, MA: University of Massachusetts Press, 1977.
17. Senechal, Marjorie and Fleck, George. *Shaping Space: A Polyhedral Approach*. Boston, MA: Birkhauser, 1988.
18. Senechal, Marjorie and Fleck, George. *The Workbook of Common Geometry*. (In preparation)
19. Senechal, Marjorie. "Symmetry revisited." In Hargittai, Istvan (Ed.): *Symmetry II*. Elmsford, NY: Pergamon Press, 1989. [180]
20. Stevens, P. *Patterns in Nature*. Boston, MA: Little, Brown

& Company, 1974.

21. Thompson, D'Arcy W. *On Growth and Form*, Abridged Edition. Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1966.

22. Watson, James and Crick, Francis. "Structure of small viruses." *Nature*, 177 (1956), 473–475.

23. Weeks, Jeffrey R. *The Shape of Space*. New York, NY: Mar-
[181] cel Dekker, 1985.

(胡作玄)

变　化

伊安·斯图尔特

每种自然现象，从亚原子粒子的量子振动到宇宙本身，都展示出变化.发育的有机体在它们成长过程中都产生变化.活生物的群体，从病毒到鲸鱼，都日复一日、年复一年地变化.我们的历史、政治、经济和气候都经受不断的、往往令人沮丧的变化.

有些变化很简单，季节的周而复始，潮涨潮落.其他的变化就更为复杂，经济衰退，疾病的突然发作，天气，各种变化都影响我们的生活.

最为重要的事是我们应该理解和控制我们所生活的变动的世界.为了有效地进行理解和控制，我们必须对于变化的模式非常敏感，特别是从那些乍一看来似乎没有模式的事件中发现其中隐藏的模式，为此，我们必须：

- 表示变化为可理解的形式；
- 理解变化的基本类型；
- 当它们出现时，认知特殊的变化的类型；
- 应用这些技术于外在世界；
- 控制变化的宇宙使之对我们最有利.

完成这些任务的最有效的媒体是数学，我们用数学建立宇宙的模型，把它们拆开看它们如何动作，我们集中它们重要的结构特征，认知并发展一般的原理.数学是“技术转移”，在一个简 [183]

单的例子中所认知的模式能够应用于科学和企业的整个领域.

变化的数学

研究变化的数学的传统方法可以用一个词来概括:微积分.在微积分中变化的系统用一个特殊的方程(用专业术语来讲,就是微分方程)来建模,它描述不同变量的变化率之间的关系,而为了能够求解方程,我们用了所需要的任何重型武器(不管是理论的还是数值的).中学数学的中心目标就是给学生学微积分做准备:建立和求解微积分中的方程是传统工程数学的生命线.

微积分现在仍然是变化的数学关键的组成部分.更新的方法,例如离散数学和计算数学增强了微积分而不是取代它.但是数学本身也经历着变化.新的问题和新的发现就意味着需要范围更为广泛多变的思想武器.两个重要的趋势值得注意:使用越来越精致的逼近方法以及利用几何学和计算机图形学.由于计算机威力的巨大增长,使前一种趋势成为可能.因为计算是基于数字处理,它要求理解离散数学和连续数学,尤其是两者之间的关系.

第二种趋势主要是数学想象力的胜利:使用视觉图象把大量信息集中在一个简单易懂的图形之中.计算机图形学已经使我们发现,变化的许多方面是比较少的基本几何形式的展示.数学刚刚开始去理解变化的这些基本建筑模块并且分析它们怎样结合在一起.这种方法论与传统用微分方程建模的精神极不相同:比起微积分来,它更像化学,要在分析和合成之间谋求小心的平衡.

在研究变化时,我们所得出各种数学概念的图象表示引导到发现大量复杂的形状,每一种都出现在许多不同的动力现象之中,从而是变化的数学中的"普遍的"对象.[14]图1展示一些这
[184] 样的图形,它们很好地显示当今的可视化方法与传统的几何中的图形(如三角形和平行四边形)之间的不同.[1,17]现在几何学成

为有机的和可视的而不是局限的和形式的了.

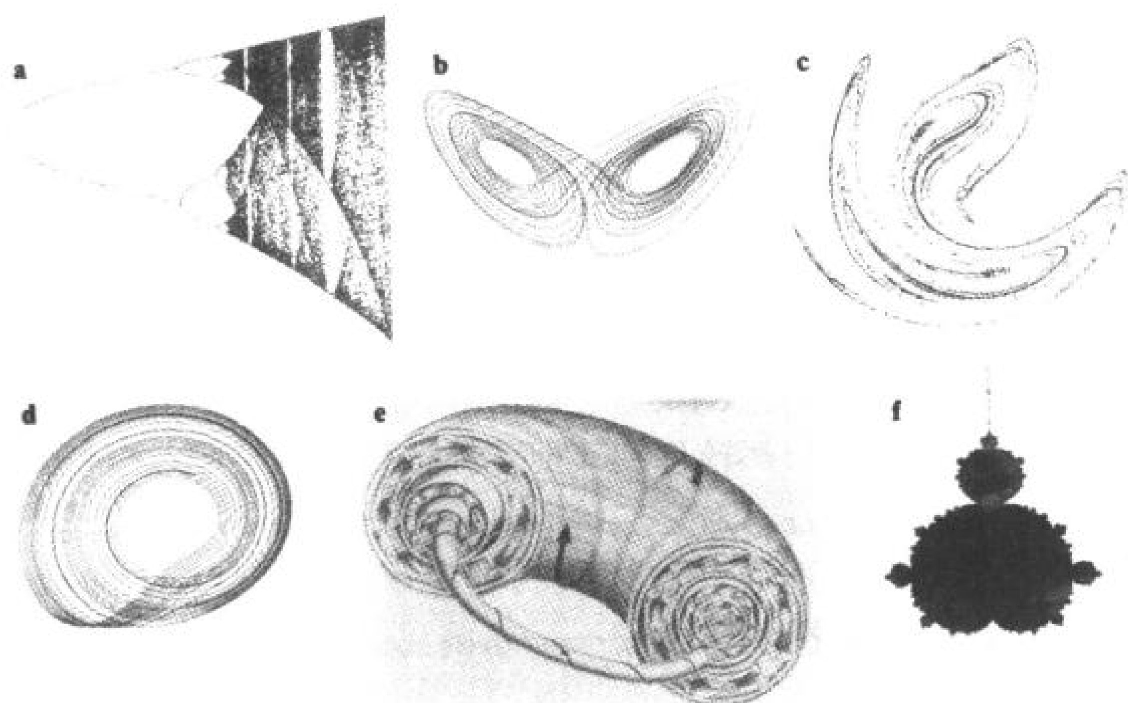


图1 变化的景观中的新景点:(a)周期加倍的瀑布;(b)洛仑兹吸引子;(c)宇田吸引子;(d)罗斯莱吸引子;(e)柯尔莫哥洛夫吸引子;(f)曼德尔布洛集合.

结果是,今天只有极少数数学分支没有经历什么变化.这部分是由于数学已经成为高度综合的和相互关联的结构.况且,这种现象是如此复杂和多变,以致于我们需要用我们所能聚集起来的想法来处理它.为了研究变化,未来的科学家需要用一种整体的世界观把传统数学、现代数学、实验和计算各个方面结合在一起.我们将需要这样的科学家,他们能像拿到铅笔那样马上接近计算机终端,能够像计算机图形那样马上画出粗线条但有丰富信息的草图,能够用图形思考就像用数字和公式思考一样快.做研究的科学家的整个观点——头脑工具箱——与哪怕 10 年前的科学家也会十分不同.

自然界和数学中的变化模式不受通常的思想范畴的约束.



为了取得进步,我们必须对新型模式有想象力地和敏感地做出
[185] 反应,我们自己的思想模式本身也应该改变.

式样的多样性

当20世纪接近尾声时,涌现出一种新型的数学,这种型式的特征就是多样性.数学再一次密切联系科学(包括物理科学、生物科学、伪科学和社会科学)的应用而发展,许多数学受到计算机或实验室实验或者自然现象的形式的启发.反过来,为数学而数学而发展起来的数学思想或者在某个不同的应用领域中发展起来的数学思想,都转移到其他任务上并加以运用.这种多样性是数学新形式的强势,它应该在所有水平上得到鼓励.另外,计算机(特别是计算机图形学)使得非专家——从学校中的孩子到经理,从学校教授到科学家——亲眼见到数学的美和复杂性并加以利用.[3,17]

这种新型数学的涌现并不意味着我们能够抛弃传统上所强调的概念的精确表述以及严密的逻辑证明.恰恰相反,它们仍然是数学工作的重要组成部分.对于数学来说,严密和精确就像实验对于其他科学一样,其理由也差不多:它们提供了可靠的理由使我们相信,思想和方法是靠得住的.它们是研究主题的自我验证和内在平衡的一部分,是对抗错误的永恒卫士.对职业数学家的训练仍然需要精密的逻辑思维和确切理解"证明"的含义.在数学中使用计算机作为"实验工具"能激发我们产生新思想、新问题,但是单靠这些实验并不能使我们理解为什么会发生观察到的现象.它们的作用在于对某些确实发生的现象提供一种确信度.

事实上随着使用计算机经验的发展,有一种重要的趋势变得十分显眼,这就是对它不予理会态度的消失."把它输入计算机,它就会回答你所有问题".如果问题的答案比如说是一个数,例如工程结构的破坏负载,一旦知道这个数,所有的问题就都没了.但是当今典型的基于计算机的研究可能产生几千张图表表

示在各种不同的条件下系统的行为.例如,考虑在不同速度和大气密度下,通过航天飞机的气流,尽管这种表格表面上非常之大,但看来并不足以决定在所有可能条件下的行为.假如系统像我们上面所提到的,包括三个可调节的参数,每个参数可以取到 [186]
10 个值,这就一共有可能有 1000 种组合,如果变量数为 4 个,就有 1 万种组合,而 6 个变量就有 100 万种组合.

在实际情况中,参数数目为 6 是很小的:化学工程中的简单问题一般都包含几十个甚至可能几百个参数.做出 100 万张图的计算机化的目录没有意义,更不用说 10 亿张或 1 万亿张图了.基本的问题"这里真正发生什么情况?"就从计算机科学回到数学领域.这种问题要求从人脑的输入远远多于从电脑的输入.

然而,决不能低估计算机的作用.它越来越成为更为流行的思想辅助工具.计算机不仅能产生"结果",而且还能在理解的中间阶段用来做实验,来检验假设以及可能的机制.在适当的保证之下,计算机计算的确能够产生数学结果的严格证明.这种计算机辅助的证明要求有非常小心的构作以及大量的人的输入以及把它们建立起来:它们远不是常规的,通常要求特殊构造的软件以及较长的机器时间.除此之外,计算机辅助证明更构成数学的一个困难的专业的领域."让它上计算机"并非万能灵药.

教 学 方 法

由于本文只是论述,严格的证明并非其主要特色.严格证明是数学家的基本技术,它仍然像过去一样重要.不过,非专家对它的兴趣要少得多了.这样一来,它的作用就没显露出来,虽然它是我们讨论的所有事情的基础.

然而,证明对于职业数学家很重要并不意味着向一定范围的听众讲授数学必须限制于某些思想内容,而这些内容的证明可以为听众所接受.这种限制会使得数学枯燥、乏味、无聊,因为

许多最鼓舞和激动人心的思想大多要依赖于高度复杂的理论来进行证明.许多数学概念用不着讲解形式的证明就能被掌握.运用一种思想与发展这种思想是完全不同的两件事,完全可能通过例子和实验给小孩"解释"相当高深的概念,尽管形式证明可能十分困难.

例如,在混沌理论中,一个重要的概念是"对初始条件的敏感性".假如从一个系统的两个非常相近的初始状态出发进行演化,运动结果可能完全不同.通过适当的软件,实际上任
[187] 何人都能认识到比如说洛仑兹(Lorenz)吸引子(图 1 b)的这种敏感和病态的行为,他只需注意看两个几乎相同的初始值是如何分开并且变得互不相干.但是,严格证明洛仑兹系统真正像计算机实验所显示的那样运行,不仅远远超出普通人的能力,而且职业数学家也还没有得出证明来,它仍然是未来研究中的一个问题.

当今的数学所要求的观点的广度和技巧的范围不只对数学家和科学家是重要的,而且对人的整个一生都重要.变化影响我们所有人.管理者、政治家、企业领导者以及其他决策者必须应付一个变动的世界,他们必须认识到变化是多么复杂,他们必须抛弃过时的假定.

设计一套对这样一代能应付多方面的人进行教育的方法是一项巨大的挑战,其中我们的目标是提出办法使得在孩子中发展一些基本的思想,激发出新观点.我们必须超越由算术导向代数进而导向微积分的传统方法.

在设计有效的新课程时,一个重要的组成部分是理解在研究的前沿领域正在发展起来的新观点.然而,课程必须适合所有的孩子,而不只是为那些将来要成为科学研究工作者的孩子.然而,在研究水平上发展的新型数学决定着未来的应用和教育的方式.对于所有级别的教师和教育工作者,重要的是理解这些新方法的一般特性以及它们提出的各种问题.

描述的层次

变化的数学可以在许多层次上来观察：

- 大的图景：什么是变化可能的类型？
- 数学技术的专门领域：怎样解方程？
- 一般应用领域：动物种群数量怎样随时间变化？
- 个别的应用：设计化学反应器生产人造黄油.
- 简单的理论例子：摆是如何振动的？

数学家在所有这些层次上进行工作，因为在一个层次上所获得的洞察力常常可以转用到其他层次上. 在数学的技术转移过程中，模式并不只和任何特殊的应用领域联系在一起. [188]

理论上简单的例子很少与工业应用直接相接. 例如，摆的动力学分析在研究超音速飞行的机翼颤振中并没有直接的用处. 用实际的话来讲，摆来自老祖父一代的钟. 但是简单的例子也有其用处：它们为我们应付实际生活的复杂性做准备. 比起任何振动机翼的实际模型来，摆都使我们更容易理解振动的许多重要特征.

为了说明这些主题，我们将用一些特殊的问题为例来解释数学的新形式. 我们选取这些问题并不是要解决这些问题而达到特殊的目的，而是这些问题引发有趣的数学思想：

- 活着的种群是如何变化的？
- 流星来自何方？
- 老虎身上为什么有条纹？

看来好像只有头一个问题涉及变化，另外两个似乎只涉及静态现象.[27]流星就在那里，或者不在那里，完全是随机的. 老虎有条纹，豹没有条纹，因此两者总碰不到一起. 事实上这些问题全都涉及某种变化. 流星真正是“随机的”落入地球大气层，或者在夜空中流星出现的背后还存在什么更有组织的事物？有条纹的成年老虎也不只是一个静态对象，它也是从一个（没有条纹

的）单细胞发育而来．在整个发育过程的某个时刻，条纹第一次出现，在这些各式各样问题当中，每一个问题的背后，变化都是它们的共同主题．

种群动力学

假如我们把几只兔子放到无人居住的岛上，很快它们就会生出一大堆兔子．可是，兔子也不能无限制地连续增长，否则很快岛上就容不下那么多兔子．由此可以得出，群体的变化受到内在和外在因素的双重影响．它们如何结合在一起影响群体的变化是数学建模的好例子，使我们能从许多不同的层次上进行研究．

增长的极限

我们从最简单的情形开始：种群只有一个单一物种，具有恒定的（因此是有限的）食物供给．图 2 表示这样一个种群增长的
[189] 典型的实验数据，其典型的 S 型曲线是许多增长现象的特征．[27]
如果我们测定正在发育的单一有机体的特性，例如正在成长的小孩的身高或体重，也会得出类似的曲线．

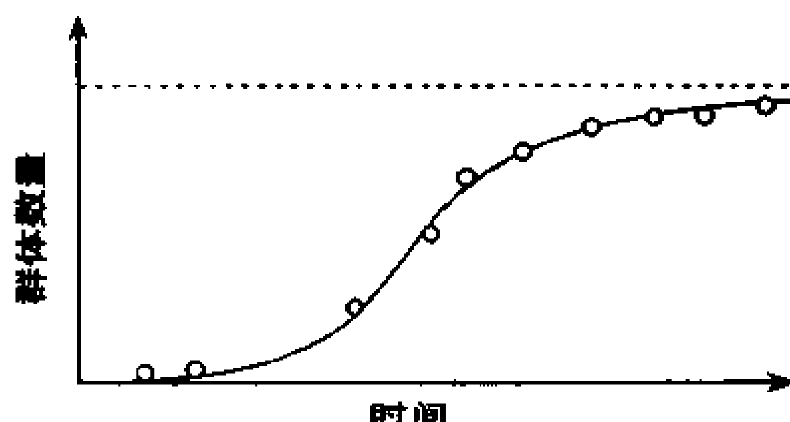


图 2　在具有有限制的食品供应的环境中，酵母菌群体的数量变化．

通常许多家庭在孩子成长过程中都记录他们身高或体重．可以把这些图在教室的墙上展示，以供讨论和比较．一个班的小孩

在一两年间的生长显示出线性增长.用高度对时间画出的各点,非常接近在一条直线上.但是,一个小孩从出生到成年完全的生长记录显示出特征的S形.起始时段和最终时段都不是线性的,早期近似是指数生长,晚期它逐步趋于常数值而达到饱和.

我们可以给记录过生长曲线的孩子们引进整个S形曲线,或者作为实验观测的结果或者作为数表.中学孩子们的一个好的练习是利用几个孩子的生长曲线,加上自己儿时的数据来预测他们自己的成年后的身高.其后,他们成为高年级学生后,就能学习如何用公式来表示这些曲线.我们应该鼓励孩子们去分析这条曲线的主要特征,并考虑为什么曲线具有这些特征.

假设爱丽丝0岁时1英尺高,8岁时4英尺高,如果按照这种增长率(每8年生长8英尺)生长,那她16岁、24岁或32岁时要长多高? 甚至小孩也能看出这些答案不可信.错在哪里? 数学是精确的,可是模型——线性增长是不适当的.教训是:当你用数学时,你必须挑选一个合乎实际的模型,而不只是去盲目地进行数字计算.

分析的层面

群体增长的研究可以在几个层面上进行——言词的层面,数值的层面,图象的层面,动力的层面,这就像随着小孩长大变得越来越成熟.酵母菌增长曲线表明,一开始增长缓慢,但是接着按指数增长,也就是在以后的时间间隔中繁殖的群体以一常 [190]
数倍增加.可是当群体变得充分大时,增长率就慢下来,最后稳定在一个极大值下.

言词的模型纯粹是描述的,它对于为什么群体稳定下来不置一词.言词的描述有助于建立一般的直观,但对于行为的进一步分析毫无用处,它主要的作用在于简单地总结出增长的模式.

为了理解指数增长的效果以及认识到为什么不能连续地无限制地增长,常常给孩子们讲一个皇帝赏赐的著名故事.在一个

遥远的国度里，一个人为皇帝完成一项重要任务．皇帝问她要什么样的奖赏．她回答说："在国际象棋棋盘的第一个格子中放上一粒麦粒，第二个格子中放上两粒麦粒，第三个格子中放上四粒麦粒，然后放八粒麦粒，如此下去，每次都加倍"，皇帝一开始还觉得这没什么，一直到他弄清楚这些数是如何增长才大为吃惊．

孩子们可以用计算器或在计算机上算这个数，更小的孩子也用不着用大数只靠每次把一张纸对折一半，不断地重复下去，就能对指数现象有一个经验．在你折不下去之前，你能折多少次？

我们可以用数表的形式收集数据，例如动物的重量，鸟的翼展，树木的干围，植物的叶子数目等等．孩子们仍能够在数字中找到模式：它们是增加？还是减少？还是保持不变？他们能够计算差和比，造出表来，并找到模式，这样数值表就自然地引出图象表示．

增长曲线给两个变量——群体数量和时间——的关连方式提供一个直观的图象．这样一个图象有时称为时间序列，用图象信息来取代数值信息，它是最简单的例子，表明变化的几何化．把数用点的位置来表示，把变化的数用曲线来表示，这种思想是变化数学中所有几何方法的基础（见图 3），孩子们需要许多机会去领会，在数学中一张图的确胜过千言万语．

实验工作最适合更小的孩子，他们能够数鸭或鸡下蛋的数目，测量正在生长植物的高度，测量每天正午的温度，记录月亮在天空中的位置．孩子们通过把这些数据画出图象，可以发现变化的模式，并讨论某些可能的原因．

可以安排更大的孩子干更难的工作：池塘的水平面，树丛中叶子的数目，股票市场的波动，物理和化学实验室的实验．利用由真实现象产生的数据是把数学纳入学校其他课程的最有效方
[191] 法．学生学过代数也可以用数学公式和方法来产生理论数据，寻求模式并且把理论同现实进行比较．

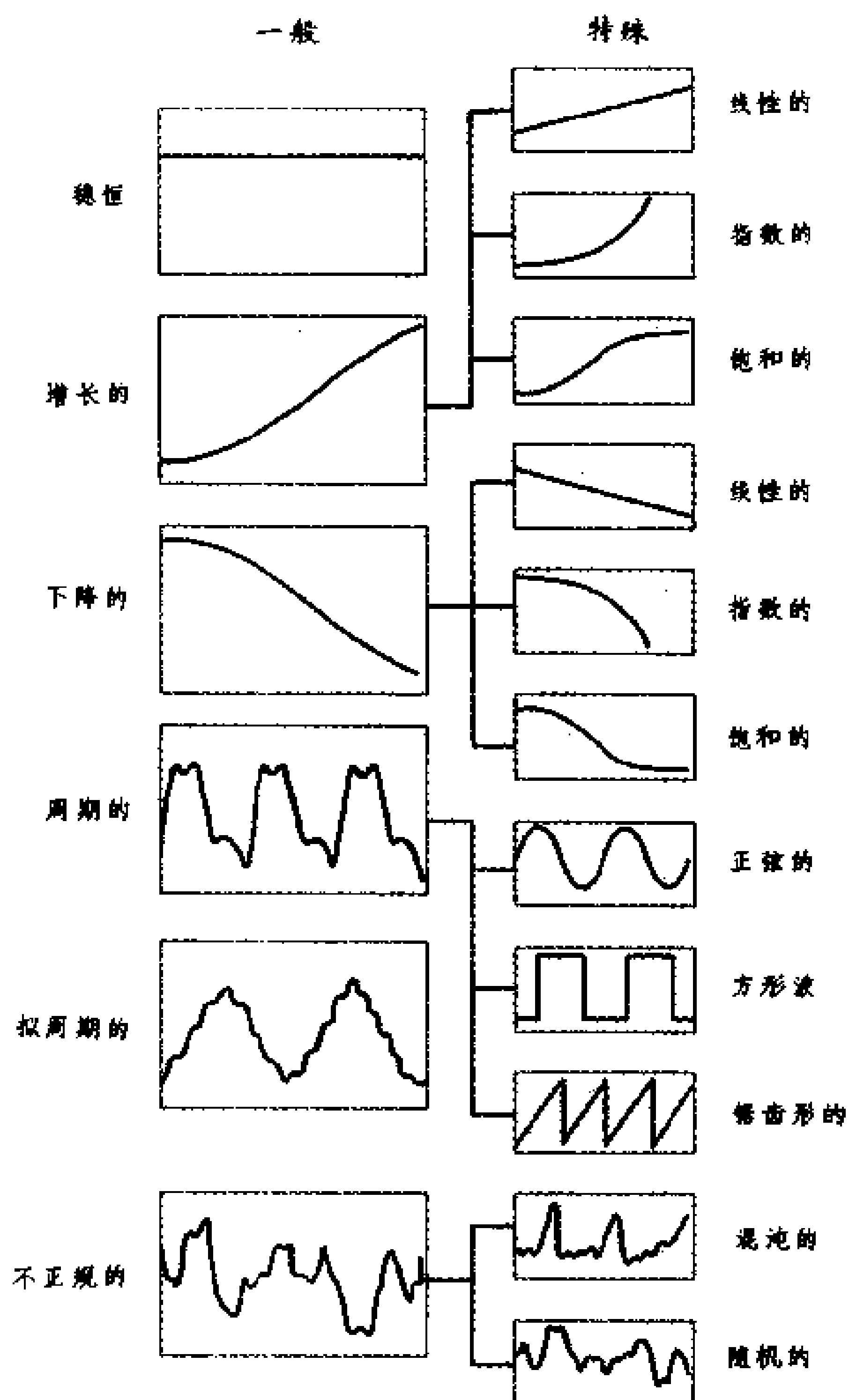


图 3 许多不同变化类型的某些以及典型的时间序列.

动 力 系 统

下一个研究层次不是给数的模式建模，而是给产生这些模式的过程建模.通过传统的方法，这个思想导致微分方程，从而需要微积分.但是还有另外一种可能性，在计算机时代这种方法有越来越大的吸引力，那就是丢掉微积分锁链的束缚，而认真地看待这样一个事实：群体中生物的数目是离散的整数而不是连续的数量.

[192]

想象时间按照离散的整数步来增长的，$t=1,2,3,\cdots$ 在时刻 t，群体大小的值 p 记作 $p(t)$，它在下一时刻的值 $p(t+1)$ 与当前值 $p(t)$ 可以通过一个特殊的增长规律联系起来.这种类型的模型称为差分方程或者离散系统.[7,28]

在活着的群体中以一种恒定增长率 m 无限制地繁殖对应一种规律，它具有 $p(t+1)=mp(t)$ 的形式，它导致指数增长：$p(t)=p(0)m^t$，其中 $p(0)$ 为群体初始大小.如果容许由于缺少食物或空间所加的限制，这个增长规律就要减去反映这些限制的校正因子而得出限制性增长定律：

$$p(t+1)=mp(t)-n[p(t)]^2,$$

其中 m,n 是常数，依赖于特殊的环境，这个方程称为韦于尔斯特(Verhulst)定律(因 19 世纪法国科学家 P·F·韦于尔斯特而命名)，它是最常用受限制增长的代数模型.

学生可以通过简单的代数工具(造表和简化方程)来研究这个方程.群体水平 $p(t)=\frac{m}{n}$ 称为截断水平，一旦达到这个水平，下一个值 $p(t+1)$ 就是 0，而且以后所有数值均为 0.为了研究群体大小与截断水平的比较，我们可以把 $p(t)$ 表示为 $\frac{m}{n}$ 的一部分，这可以通过改变测量单位令 $p(t)=q(t)\frac{m}{n}$ 得到.由此导出方程

$$q(t+1)=m(q(t)-q(t)^2),$$

其中 q 表示为群体作为截断水平的部分的大小.现在我们就只有一个参数 m 而不是两个参数 m,n,这就使得数学更加简单,因为 $q(t)$是截断群体的一部分,从而是 0 和 1 之间的某个分数.

像韦于尔斯特定律这样的差分方程用计算机计算是最理想的,因为它表示一个简单的重复步骤,现在用时刻 t 的行为来描述下一时刻$t+1$ 的行为.我们可以用计算机很容易算出离散韦于尔斯特定律的解,而无需知道这些解的公式(实际上这些解没 [193] 有一般公式).于是我们能够把这些结果概括在单一的几何对象如时间序列图中.

这表明一个重要的一般原理:往往离散数学比连续数学(微积分)更容易理解.当学生开始学习代数(通常在学习微积分四年之前),就可以通过数值表来引进并学习韦于尔斯特定律.但是,导出离散系统的复杂的数学结构仍然比较困难,处理它们往往用实验,至少也要用计算机.

数 值 实 验

韦于尔斯特定律给数值实验提供了一个绝佳机会,它只用到初等算术以及计算器.[3,23]即使小学生在学习代数的表述数年之前,也能够理解这些规则.韦于尔斯特定律的代数形式是:

$$p(t+1)=m[p(t)-p(t)^2].$$

它能很容易地翻译在一张表或者空白表格上,可以用来研究参数 m 取不同值的情形.(注意现在我们用 p 表示群体大小的比例[以前用 q 表示],而不是群体大小.)

我们从某个 $p(0)$值开始,比如说 0.1,然后依次计算 $p(1)$,$p(2)$,$p(3)\cdots$,用文字来讲,新的数值等于老的数值减去老的数值的平方,然后乘以一个常数.

例如,假设 $m=2$,则相继数值是

0.1,0.18,0.295,0.416,0.486,0.499,0.5,0.5,…

我们看到开始数值增长,最后稳定在一个特殊的水平.这种增长类似于酵母和其他均匀群体的实验验证的增长(见图 2).当 $m=3$时,我们得到

0.1,0.27,0.591,0.725,0.598,0.721,0.603,0.717,…

这种情形下,数值似乎在 0.6 和 0.7 之间振荡.(事实上,这种振荡最后衰减下去,但是极为缓慢.当 $m=3.1$ 或 3.2 时,它就变得更加明显.)最后,考虑 $m=4$:

0.1,0.36,0.922,0.289,0.821,0.585,0.970,0.113,…

现在我们完全看不到明显的模式了!究竟发生了什么情况?

韦于尔斯特定律导致的行为范围极广,包括周期振动以及明显的没有模式的无规则行为,后者就是所谓的混沌,用计算器
[194] 进行简单实验就能把很小的孩子带到科学研究的前沿.的确这个例子能够引导到大量的课堂活动:用计算器、计算机或者电子空白表格程序得出数值结果,用图象表示结果,辨认出模式,分析它们为什么会出现.

传统上,看来随机的行为是用统计来建模,其中的方程包含明显的随机项.但是韦于尔斯特定律中没有随机项,它是确定性的.这个例子令人惊异地表明由一个简单和明显的规律所预言的行为可能是高度不规则的,甚至是随机的.

这种悖谬的发现称为确定性混沌.无规则的涨落可能由非随机规律引发,这使得许多无规则的现象可用简单的方式来建模.它还表明单纯的原因能够产生复杂的后果.它成为当前数学研究的最令人激动的领域之一.[5,11,24]

无规则的果蝇

我们常常有可能认为,混沌行为只不过是模型中的人为假象,而不是自然界的现象.图 4 表示,在一个密闭容器中用一定

蛋白质饲料喂养的果蝇数量的实验数据.[15]当果蝇数量增长太多时,食物就太少,果蝇就不能正常地繁殖.于是,果蝇数量就开始下降直到有足够多的食物;然后果蝇又无限制地繁殖,数量再一次猛增.

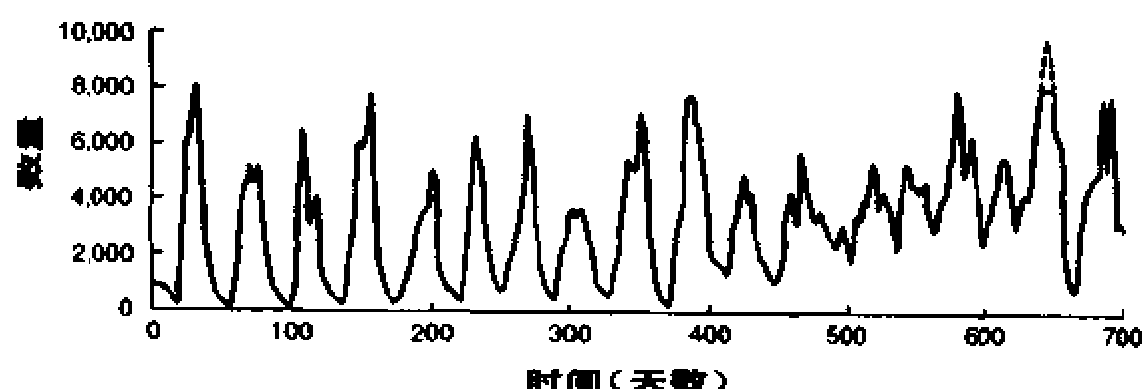


图 4　果蝇数量的实验的变化显示出无规则的振荡行为,这是确定性混沌的典型现象.

主要的整体结果是存在一个周期大约为 38 天的振荡,不过,正如时间序列所示,群体数量的变化方式要明显地复杂,图中许多峰值是双峰,更像 M 形而不是Λ 形.峰值的高度也有变化,按照小、中、大的顺序轮流重复.在过了前 450 多天之后,变化变得越来越不规则. [195]

这张图显示出在数学建模和科学数据的分析中一个重要问题.我们所观察到的变化有些是来自果蝇的群体动力学,还有其他的可能来自诸如玷污的食物、疾病,或者说不定还有潮汐和火星在星空中的位置等外在影响.我们怎么能说清楚什么是什么呢?

我们不难假定有规则的后果——M 形的峰值和它们大小的高低变化与外界因素无关,而 450 天之后越来越无规则则由于某些外界因素出了差错所致.不过,这个假定可能是不对的,用类似于韦于尔斯特模型所做的数值实验表明,简单的数学规律既能产生规则的振荡,也能产生不规则的混沌,只是对单一的

参数做个微小的变化即可.事实上,果蝇数据的许多方面,包括其各种不规则性,都能用单纯系统来建模.

我们可以让孩子们通过先用计算器后用计算机进行数值实验,来理解简单系统中各种可能的复杂行为.他们能在明显无规则的数据中搜寻模式.例如,给定由韦于尔斯特定律或相关方程所生成的时间级数,他们可以用 $p(t+1)$对 $p(t)$作图,看看是否所有点都落在一条光滑曲线上.他们能够分析曲线来确定其几何特性,大一些的孩子能找到适当的公式并估计增长率参数值 m.

这种几何技术的更复杂的方式已经应用在多组观测数据上,例如患上某种疾病(例如麻疹)的人数出现的明显的随机涨落.实验的时间序列往往看来是随机的.但是,经过图象分析提示,在表面的不规则性之下,常常是一个简单的过程,就像一个差分方程.结论是,往往总能建立起简单而现实的模型能够再现这些系统中变化的模式.

移向微积分

凭借微积分的传统分析在为群体增长建立模型上仍然起着重要的作用.在这种情形下,它提供一个公式而不是图象或数值表.在基于微积分的模型中,$p(t)$的值不一定是整数,虽然实际的群体数量必定取整数值.因此,这个模型是对离散现象的连续
[196] 逼近.这是一种通用的技术,特别当群体数量的最大值相当大时常常应用.这时在群体中加上或者去掉一个个体所引起的变化极其微小,因此数量大小的可能变动范围同连续变动范围不容易区别开来,结果所得到的模型是*微分方程*,这是高等数学中最关键的概念之一.微分方程不只涉及变量,例如群体数量 p,而且还涉及变量的变化率.一个变量 p 对于时间的变化率传统上记作$\frac{dp}{dt}$.

最简单的群体数量微分方程是均匀增长定律$\frac{dp}{dt}=mp$.这是

说，在给定时刻 t 群体数量 p 的变化率$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$与这个时刻的群体数量 p 成比例，比例常数是 m. 换句话说，大群体比较小群体按照比例产生更多的后代. 这个微分方程的解是 $p(t)=p(0)e^{mt}$，其中 $p(0)$是 $t=0$ 时群体数量的初始值，它表示连续的指数增长，群体数量无限制地爆炸性增长.

在实际情况下，必定有其他因素出现来限制增长. 正如韦于尔斯特定律情形一样，我们把方程改变一下，减去一项 np^2，其中 n 是第二个常数：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=mp-np^2.$$

额外加的这一项的意义是，当 p 很小时，p^2 比起 p 来可忽略不计，从而校正项 np^2 不起什么作用. 在这种情形下，我们得到的几乎还是指数增长. 然而，当 p 变大时，$-np^2$ 这一项就成为主导动力学的项，它显著地减少增长率. 的确当 p 达到值$\frac{m}{n}$时，群体数量变化率$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$就变成 0. 当出现这种情况，群体数量就不再增长. 因此，$\frac{m}{n}$表示群体数量的极大值. 利用微积分的技术，就可以求出一个解的公式. 这个解的图象，称为*后勤*(logistic)*曲线*，同样具有 S 形，和酵母实验数据一样(图 2).

连续的韦于尔斯特定律可没有离散的韦于尔斯特定律显示的大量的多种多样的行为——稳恒的、周期的、混沌的，它只产生一条光滑的 S 形曲线，这以令人信服的方式表明了由离散模型变到连续模型，或者反过来，由连续模型变到离散模型，就会产生出新现象，但它不只是一个无所谓的技巧. 像这些例子都引发连续模型和离散模型关系之类的重要问题，这些关系值得在中小学各年级的数学课上加以深入探讨.

连续模型允许实验数据和理论曲线相拟合，这开创了预言未来行为的方法. 例如，如果一条后勤曲线与 1930 年之前美国

[197] 人口相拟合，它就能预言到 2000 年，美国人口应该稳定在 2 亿

究所得到的还要多. [198]

稳 定 性

现代对行星运动的理解来源于法国数学家亨利·庞加莱(Henri Poincaré)在上世纪末到本世纪初的工作.[9,22]1887年瑞典国王奥斯卡二世(Oskar Ⅱ)提供2500克朗的奖金悬赏回答天文学的一个基本问题:太阳系稳定吗?现在我们能够明白,庞加莱的答案是关于天体变化的数学研究的一个主要的转折点.

科学家把一个系统称为稳定的,如果它受到小的扰动的干扰并不发生改变.要是小的扰动趋向于放大导致行为大的变化,它就是不稳定的.例如一颗平头钉横放着是稳定的,而在钉尖上竖着的平衡的钉就不稳定,因为它总是要跌倒(图5).

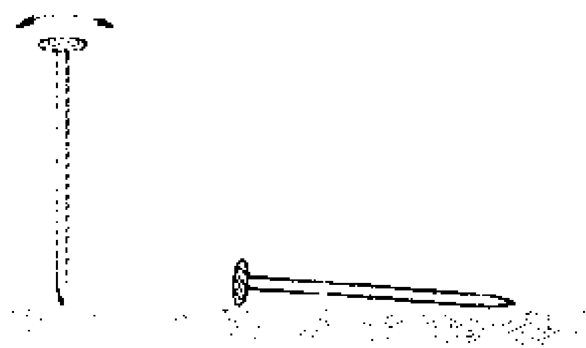


图5 平头钉的不稳定和稳定状态:当它在钉尖上达到平衡时,任何摇摆都会使它倾倒,而钉子平放时,小的力只使平头钉的位置发生小的变化.

小孩对于稳定和不稳定系统的概念能够发展出可靠的直觉,通过探索各种机械"操纵玩具"的行为,例如复摆,相互作用的磁铁,陀螺仪等,的确可认识到动力系统典型的复杂性.例如,考虑一个有磁头的摆,放在另一个磁体上端摆动,如果这两个磁铁正负极相反,则摆被下面的磁头吸引,稳定在向下的位置.但是,如果两个磁体正负极相同,你试图把摆保持在下面磁铁的上

方，它就力图移开，于是向下的位置是不稳定的，连小孩都能感觉到它！

当前物理课的特点往往是按照相当正规的方式进行这种类型的实验，实际上也可以在数学课上进行不那么正规的实验，作为发展学生对变化和运动稳定性和混沌的直觉的组成部分. 在孩子的直觉得到很好发展之后，在以后的学习阶段，可以通过适
[199] 当的数学模型对这些经验加以形式化.

稳定性是一个极端重要的问题. 飞机不仅要能够飞行，而且飞行还必须稳定，否则的话，它就会从天上掉下来. 汽车绕过拐角时，一定不能翻倒. 太阳系是动力学中非常复杂的一部分，我们怎么能知道它的运动是稳定的？是否所有行星都大致沿着它们现在的轨道继续运动？是否冥王星能在太阳上坠毁？是否地球会游荡出去到孤零零的外行星当中？这些都是非常复杂的问题，很难得出它们的答案.

橡皮膜动力学

庞加莱并没有解决奥斯卡国王的问题，它太难了，但是他取得了初步的进展，使得他不管怎么说还是拿到了该项奖金. 为此，他创立了一门新的数学分支，现在称为拓扑学. 拓扑学常常被描绘成“橡皮膜的几何学”，但是，它更适合定义为“连续性的数学”. 它研究光滑的、逐渐的变化，它是无间断性的科学.[8,18]与其对比，不连续性是突然的和戏剧性的，它出现在原因微小变化产生结果巨大变化的地方.

两个天体（例如只包含地球和太阳的系统）的运动是周期的，它一次又一次地重复，每年一次（这就是“年”的定义）. 这种周期行为立即证明，在这样一个只包含地球和太阳的太阳系中，地球不会落到太阳上，也不会游荡到外层的无限空间，要是地球真能这样，它就会每年都落到太阳上或者每年都游荡到外层的无限空间中去. 可是这种事不能发生超过一次，如果去年没有发

生这事，它就永远不会发生．换句话说，周期性使我们对稳定性能够非常有效的掌握．但在我们非常现实的宇宙中，许多物体会干扰这种简单的图景，然而，周期性仍然很重要．

两个物体在引力作用之下其行为十分简单，它们关于共同的质心做椭圆形轨道运动．可是三个物体的行为就难以置信的复杂，甚至我们把问题简化为，其中一个物体的质量比起其他两个物体来非常非常小．超过三个物体可能导致更加难以处理的行为．

手技杂耍是稳定周期运动的一个例子，它是周期的，因为反复施加的是同样的作用．它必定是稳定的，否则的话就要不成．耍两个物体比较简单，耍得越快就变得越复杂．假如要教小孩玩手技杂耍，他们就能很快领会动力系统的复杂性．他们能分析杂耍运动的周期模式．为什么杂耍是稳定的？手眼反馈的作用是什么？ [200]

庞加莱努力去解决周期解的存在性问题，他发现可以通过拓扑方法来检出周期解．假使在某个特殊的时刻，系统处于某个特殊的状态，而且在以后某个时刻，系统又处于同一状态，那么这个离开这个状态又反回来的运动，就必定重复，一次又一次地永远重复下去．只要有一次回到先前的状态，而且它在所有细节都同原来一致，这就是周期运动的本质．

如果我们把这个思想几何化，它要用到拓扑学．[24]想象一下，把系统的状态用某个高维空间的点的坐标来描写，这个空间就称为相空间．当系统发生变化时，这点就要移动．在相空间中描画出一条曲线．为使系统回到其初始状态，曲线必定封闭起来成为一个圈或环路(图 6)，这样系统的稳定性就翻译成"曲线何时形成一个封闭的环路"．这个问题并不问环路的形状、大小或者位置，仅仅只要求它是封闭的，这就是一个拓扑问题．因此，周期解的存在性依赖于相空间中表示系统的状态变化的线的拓扑性质．

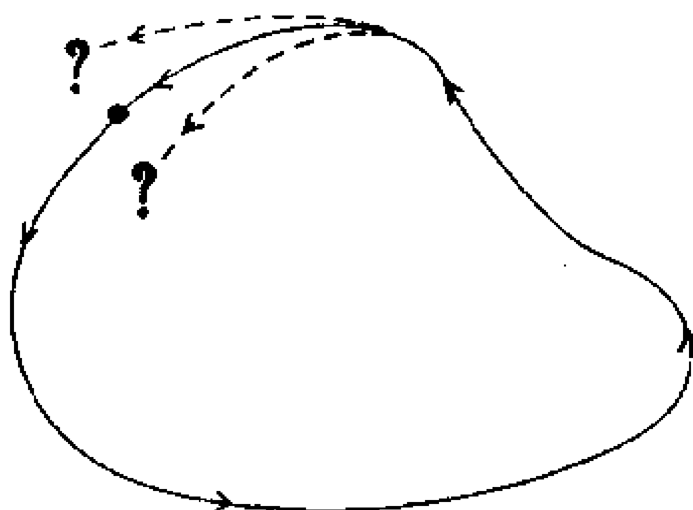


图 6　庞加莱研究周期性的几何方法，如果系统的状态在相空间中画出一个封闭环路，则这个系统必定是周期的，因而是稳定的.

相空间是一个多维的、抽象的数学空间，它表示决定系统状
[201] 态的所有可能的变量，状态本身则由相空间中一点来表示.当状态发生改变时，这点就移动，描绘出一条曲线或流线.这些流线合并在一起的图象称为系统的相图.[1] 流线主要由曲线来表示，它对应于各种初始表的坐标的随时间的演化过程(见图 7)，箭头表示时间演进的方向.

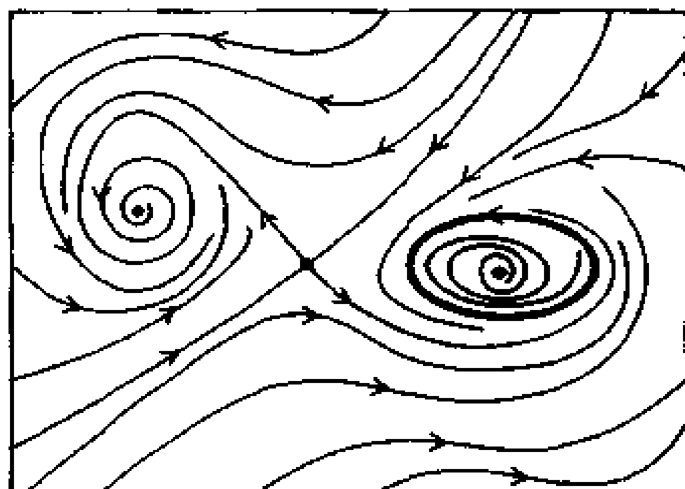


图 7　相图的例子，其中不同的曲线表示系统在不同初始条件下可能的演化.

相 图

一旦孩子们掌握了描绘一个变量变化的图的观点，就可以给他们引进相图．在这种情形下，我们不是对应时间描记单变量的值，而是把两个不同坐标方向的两个不同变量的值的序列标记在时间序列之中．通过这种练习能够发展变化的、多维的几何洞察力．对于小孩子，这些变量可以是成长动物的身高和体重，或者是每天的温度和雨量．大孩子可以考虑天文现象，例如太阳和月亮的位置或者对电路的测量，或者对摆的观察，或者在世界外汇市场上，两种不同的汇率的价格波动．

单摆的振动给相图提供了一个非常富有启发性的例子，不过它的全部细节只适用于给更高年级的学生讲．传统的讲摆的方法是写下一个近似的方程，它的解是正弦曲线．这种近似是必要的，因为摆的精确模型的真正方程，用标准的微积分技术不能求解．学生的确能够学到正弦曲线的有用的性质以及当摆动很小时摆的周期公式．但是，这种传统方法在某些方面是不令人满意的，因为所使用的近似很难得到证实．它留下一个不合适的印象，仿佛缺乏精确性在数学中也可以被接受．

换一种方法，我们可以用能量守恒定律来产生摆的运动的精确模型．它导出方程

$$v = C\sqrt{k + 2\cos\theta},$$

其中 v 表示速度，C 和 k 是常数，θ 是摆与垂直线所夹的角．画出这个曲线族的图，我们事实上就画出相图（图 8）．一个真实的摆的运动，包括大振幅的运动，甚至像螺旋桨那样的转动，都可以从这张图上看出来．[24]用这个方法，学生们在得到 [202]
正弦函数同样正确练习的同时，还得到了非近似的精确模型以及重要的物理原理（能量守恒）．这不是研究摆的更好方法吗？

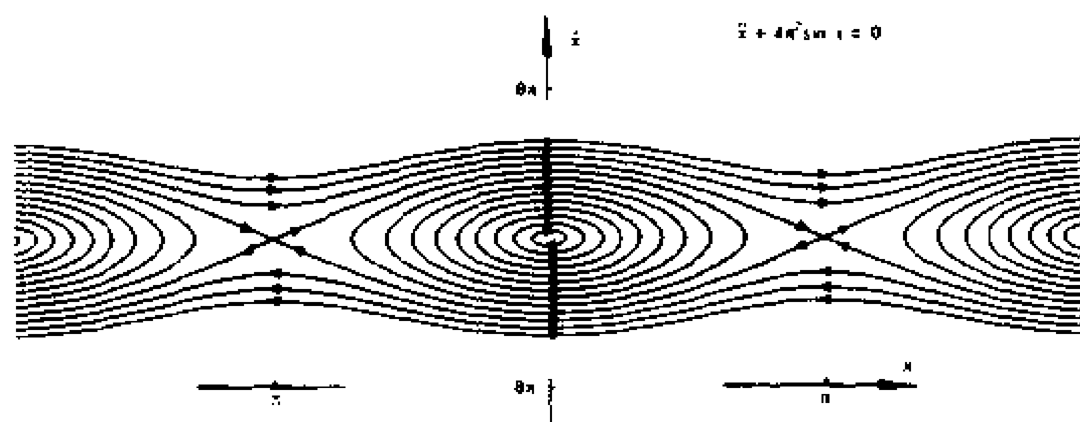


图 8　摆的相图，从中所有可能的运动都能见到.

共　　振

三体的动力学方程不能由公式求解，但是它们可以输入计算机进行数值求解. 这些模型提供了好方法来探究动力系统的运动中，共振的惊人效应. 当不同的运动周期的周期之间存在简单的数值关系，例如 1:1，2:1，3:2 等等，就会产生共振. 例如，土星的卫星泰坦与另一颗卫星许珀里翁的轨道周期接近于 4:3 的共振. 具体讲，许珀里翁用 21.26 天绕道一周，而泰坦用 15.94 天绕一周，其比值为 1:3337，确实非常接近 4:3 之比.

大一些的孩子可用计算机软件包来模拟行星的动力学. 他们能学习月球的运动以及从地球发到月球上卫星的运动. 他们能学习木星的卫星锁定在共振轨道中的方式. 他们能学习所谓拉格朗日点，在这点上卫星(或其他宇宙空间移民区)处于月球前或后 60°稳定的位置上，这也是一种共振.

共振对动力学特别重要，共振导致丰富而深奥的几何学，它们几乎是难以置信地复杂. 图 9 中大圆表示正规运动，大圆之间二级“岛”表示共振，三级岛表示更精细的多重共振. 意大利面条状的交叉表示混沌. 这种结构在越来越小的尺度上无限制地重
[203] 复下去.

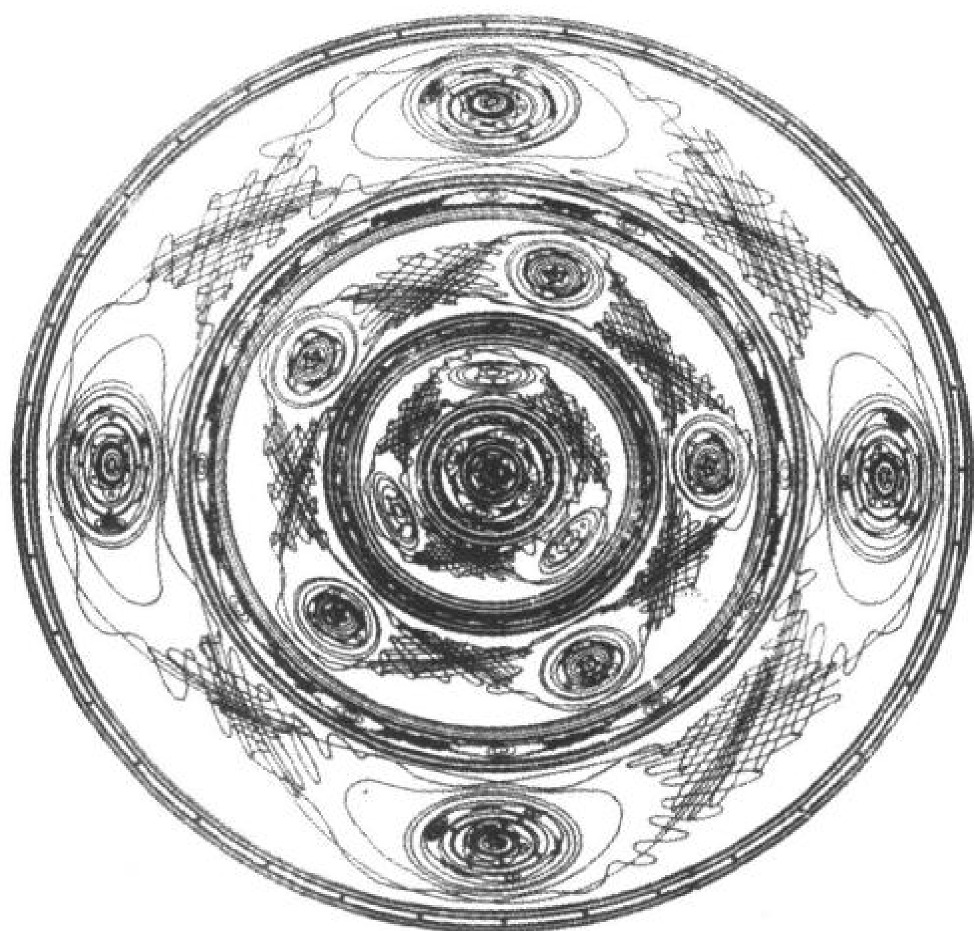


图9　周期轨道附近的分形结构:岛表示各级的共振,而纠缠在一起的线表示混沌区域.

中学生能很容易搜寻天文表寻找共振的证据,这项工作包括用分数、小数、计算器、计算机的大量练习.它表明,对于那些从数学视角来看世界的人,简单的数学是如何能使他们产生深刻的见识的.

共振往往产生混沌,图9具有一种特殊的扰动特性,那就是自相似性,也就是每一个岛均具有相同的复杂性,实际上同整个图形具有一样的定性形式,这种复杂的自相似的结构并不是一些疯狂的数学家的梦魇,它在现实中的确出现.

我们能让12岁左右甚至更小的孩子懂得自相似性的概念以及相关的分形几何的思想.这个主题可以通过自然界的实例来引入.海岸线、叶子、蕨类植物等.其次,分形像康托尔集、雪花

以及龙形曲线.它们的计算机模型可以画出来并对其模式加以分析.分形结构的自相似性的概念可以很容易地由这些例子发展出来,甚至小孩子也能理解分维(维数不一定是整数维)的想
[204] 法.

间隔和成团

另一个天文之谜——小行星带的间隔也以共振为其突出特点,它与我们原来的流星问题直接相关.大多数小行星在火星和木星轨道之间绕太阳转动,但也有少数十分靠近太阳.不过,小行星的轨道并不在火星和木星之间均匀分布,它们的轨道半径聚集在某些值处而远离其他数值(图 10).美国天文学家丹尼尔·寇克伍德(Daniel Kirkwood)大约在 1860 年左右使大家注意到这种均匀性的缺乏.他还注意到最明显的间隔的令人好奇的特点:假如小行星的绕太阳运行轨道在这些寇克伍德间隔之中,它们的轨道周期就会同木星的轨道周期共振.结论是,与木星共振会扰动该轨道上任何天体,产生某种不稳定性,把它赶出一段距离,使得共振不再发生.木星的特殊作用用不着大惊小怪,因为比起其他行星来,木星的质量太大.最新的数据表明,间隔是非常明显的,特别是共振 2:1,3:1,4:1,5:2 和 7:2.另一方面,在3:2共振处,存在一团小行星——希尔达群.因此稳定性不单是共振的问题,它依赖于共振的类型,这仍然是紧张研究的问题.

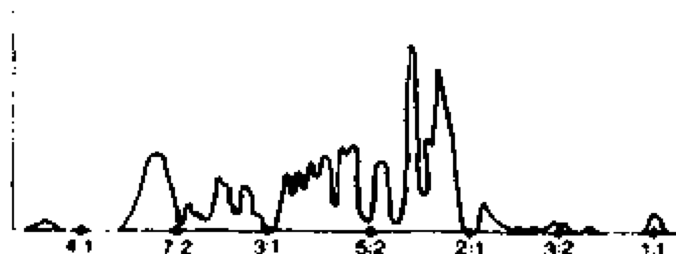


图 10 小行星分布中的间隔和成团揭示出与木星轨道周期的共振.

最近用计算机计算[30]表明，小行星的绕行轨道的距离如果同木星引起 3:1 的共振，那么其轨道或者大致接近圆形，或者是长轴很长，短轴很短的椭圆．如果一个小行星的轨道充分拉长，就要和火星的轨道相交．每次它与火星轨道相交，它就有可能更加靠近火星，因为它的轨道受到剧烈扰动．最后，它离火星太近了，就会被送上一个完全不同的轨道．因此，出现 3:1 处的寇克伍德间隔，这是因为火星把它打扫干净而不是木星的作用．木星只是引起共振，它使得小行星轨道与火星相交，然后火星就把它踢到孤零零的地方．木星开球，火星得分．

使火星把小行星扫在一起的同样机制也使得流星到达地球轨道．与木星 3:1 共振似乎是把流星从小行星带搬到地球轨道 205
上的主要原因，如果它撞上地球，它就在我们这颗行星的大气中燃烧．[26]这个在火星和木星之间小行星的宇宙足球比赛决定飘浮的宇宙岩石（有时可能是山）是否在地球大气中坠毁．我们很难再找到更富有戏剧性的例子来说明整个太阳系的本质统一性，也难找到变化之间相互联系的更好例子．

老虎的条纹

威廉·布莱克（William Blake）谈到老虎时说："什么样的不朽的手或眼敢于造出你那可怕的对称性？"虽然布莱克没有在专门的意义下使用"对称性"这个词，但对称系统的行为在老虎条纹的本性上的确有突出的表现．

对称性在我们科学地理解宇宙上是最基本的．[13]晶体的对称性不仅用来对它们的形状进行分类，而且还决定它们的许多性质．许多自然的形态——从海星到雨滴，从病毒到星系，都有惊人的对称性．人造的物品也力图具有对称性：圆柱形管道，圆板，方盒，球状碗，六边形的钢杆．

在数学物理的流行观念中，对称的原因产生对称的结果长期以来是一个标准的原则．彼埃尔·居里（Pierre Curie）简洁地陈

述这条原理：[6]"假如某些原因产生某些结果，则原因中的对称性要在产生的结果中再现."这条原理似乎十分自然，可是它对吗？这个问题十分微妙，它不仅涉及"对称性"的意义，而且还涉及"原因"和"结果"的意义.

最近科学家和数学家越来越感到，居里所陈述的命题的一个重要方面是错的，因为对称的系统有可能表现出不对称的行为.这个现象称为对称破缺，它是从天文学到动物学中许多物理系统中模式形成的重要的根本机制.对称破缺的数学理论提供了强有力的方法来分析对称系统如何表现，而且它可应用于整个科学领域的各门学科.[12]

居里是对的

乍一看，居里的命题"显然"是对的.如果一个完美的球形行星产生海洋，海洋就肯定应该一样深，从而海洋本身也是一个
[206] 球.行星的球形对称性在其海洋相应的球形对称性中得到反映.要是没有任何产生不对称性的原因，海洋凸出并不一样，那就显得十分奇怪.

另一方面，假如行星自转，这就打破了球形对称，而代之以绕自转轴的圆形对称，那么海洋就会在赤道上突起，保持圆形对称性.是否这就是对称行为的典型表现呢？不总是这样.

居里是错的

居里的原理似乎是显然的，但是它的确需要十分仔细地加以解释，因为有许多对称系统它的行为比起整个系统来对称性更差.例如一个完全的圆柱，例如管状金属支杆，用足够大的力来压缩，它就会弯曲变形.弯曲变形并非是由力引起的对称缺失的后果，甚至当力完全沿着管轴作用，保持关于该轴的转动对称性时，管支杆仍会弯曲变形.弯曲后的圆柱体不再是圆柱形的，这就是"弯曲"的意义.同样，图 11 表示通过球对称的压缩力引

起的压弯的球壳的计算机图象，可以看出压弯的状态是圆对称的而不是球对称的．

重要的是，理解这些系统中对称性的丧失不仅是由小瑕疵造成的：甚至在理想化的完全的数学系统中也存在非对称解．实际上，这样一个“完美的”系统在很大程度上控制对称性如何破缺．不过，瑕疵在精确选择对称性在哪里破缺起着重要的作用．例如，当一个像图11中的球那样的完美系统压弯时，圆对称轴可以是原来球中任何一条轴．对于不完美的系统，某些轴更 [207]

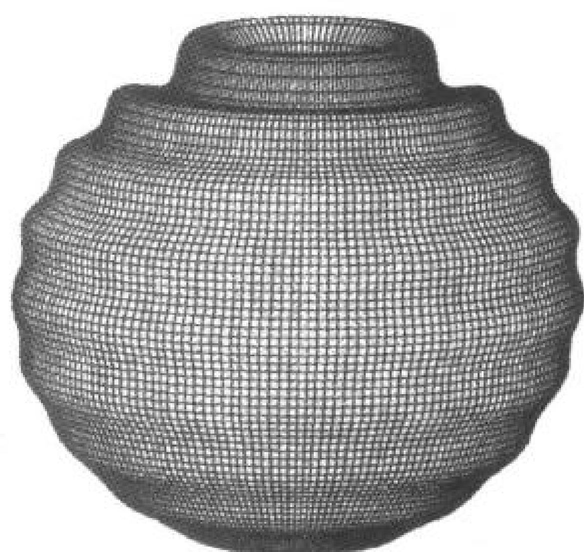


图11　均匀球壳在均匀的外界压力下产生的对称破缺的弯曲变形．球壳以柱对称的方式弯曲变形．

可取，这是由于它们的位置与球壳的薄弱环节有关．不过，不管哪种情形，被压弯的球面的一般形状是一样的．

在这种意义下，对于真实的物理系统（它必定是不完全的），居里原理或许是对的，但对于理想化的模型，它肯定不对．然而在这种情况下，与其说去试图挽救居里原理，还不如去理解完全理想化的对称系统如何产生出对称性更差的机制更可取，这称为对称性破缺．它似乎是自然界中多种类型的模式形成的原由，它具有非常确定的数学结构可用来理解这种过程．

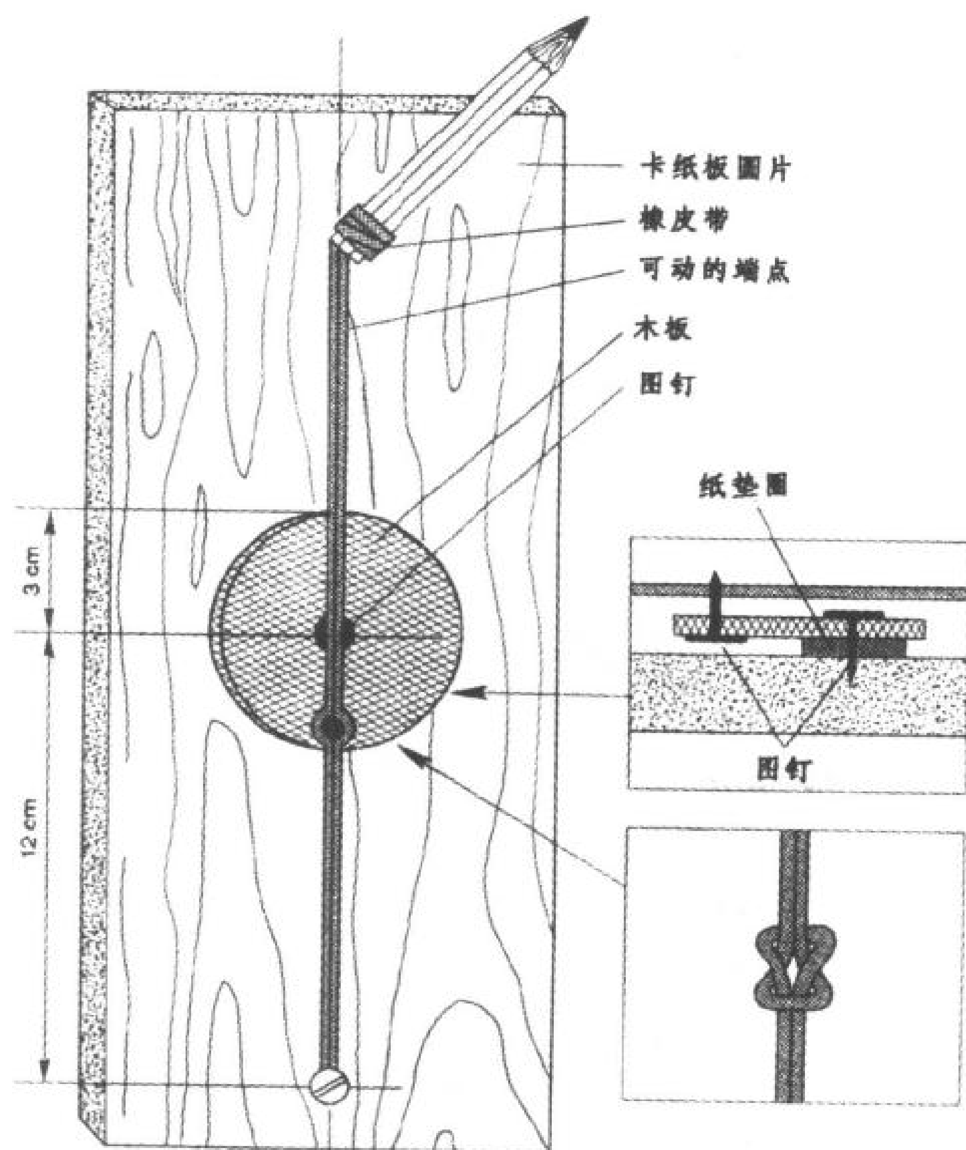


图 12 "突变机"不难用卡纸板和橡皮带造成.把半径3厘米的厚卡纸板圆盘用图钉和纸垫圈固定在木板上.在靠近圆盘边缘安装另一个图钉,钉尖朝上.在这个图钉上装上两条橡皮带,它们在没有拉长时长度为6厘米.把其中一条固定在距离圆盘中心12厘米的一点上,而另一条的端点可以沿着中心线自由移动.例如,如图所示把它拴在一根铅笔上,你可以用手使铅笔移动.

什么是对称性破缺的原因?答案是自然系统必定是稳定的.居里断言对称系统应该具有对称状态,这是对的,但是他没

能讨论它们的稳定性问题.如果对称状态变得不稳定,则系统还会表现出另外的行为,而这些行为就不可能是对称的.

对称性是怎样"变没的"?我们用一个例子来回答这个问题.1969年,沃瑞克大学的克里斯朵夫·齐曼(Christophe Zeeman)由完全不同的理由发明了"突变机"(图12),[19,20,31]突变机表明除了向外伸展之外没有更多的对称性破缺,孩子们可以造一个并用它做实验.

整个突变机具有关于中心线的反射对称性.如果你开始拉伸没固定死的橡皮带,系统服从居里原理,仍然保持对称性(图13a).但是如果你再进一步拉长橡皮带,圆盘突然开始转动,可能按顺时针方向转,也可能按逆时针方向转(图13b),这时系统的状态丧失其反射对称性,对称性已经破缺,居里原理不再成立.

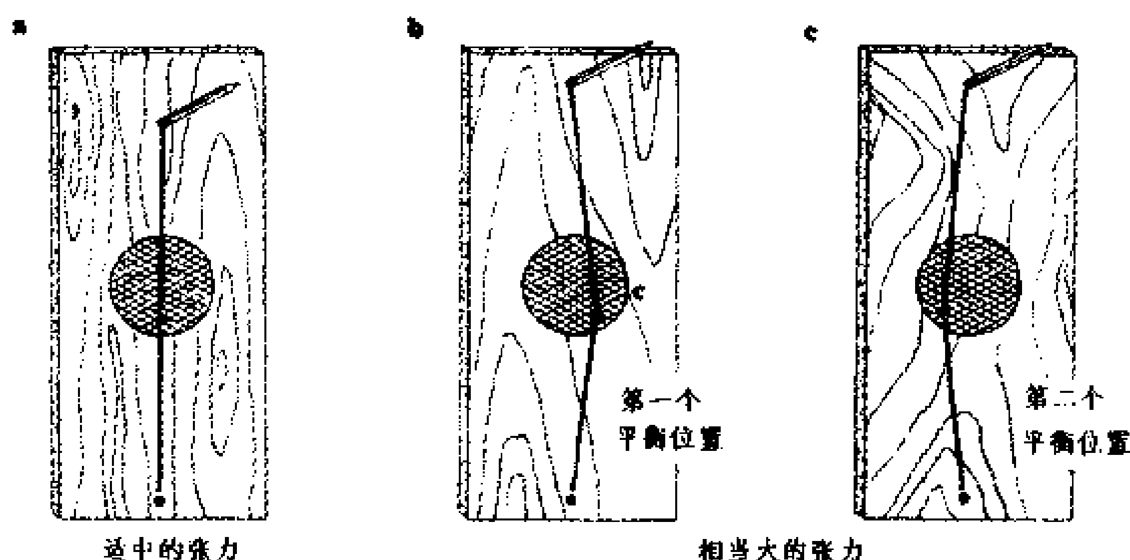


图13 拉伸橡皮带时,图钉的对称位置(a)变得不稳定.两个稳定的位置出现在两边(b)和(c).但是,这两种情形都没有原来图形的对称性.在这种情况下,正如在自然界中许多其他例子一样,不稳定性破坏对称性.

那么失去的对称性到哪里去了呢？稳稳地抓住橡皮带，把圆盘转动到另一边对称位置上(图 13c)，你就会发现，它就停在那里．原来的单一对称状态现在变为两个对称相关的状态．

这就是对称性破缺的一般特点．系统可以处于几个状态，每个状态都可由整个系统的一个对称从其他状态得到．例如图 11 中的压弯的球壳破坏原来球形对称性变成圆形对称性．圆形对称性总是关于某个对称轴出现的，这从图中可以明显看出，在一个"完美的"系统之中，任何轴都是可能的．但是，所有压弯的状态都具有同一形状，它们之间只相差球的运动．

孩子们仍可用简单的实验探究对称性破缺．他们可以压塑
[208] 料尺看看它什么时候变弯以及如何变弯．他们也可以用一个弹簧让杆保持竖直．杆的下端立在桌子上，然后在杆的顶端加上重量，观察它偏离或者压弯．他们可以用可弯曲的金属片造一座"桥"，然后在桥顶加上重量，看着这桥垮掉．

更多的学生可以分析由弹簧联结两个刚性杆的行为，这些模型都自然而然地引出关于对称性、稳定性以及连续变化的更精深的问题．如果转动物体的重心改变，它会如何运动？船只是
[209] 如何倾覆的？对这些变化模型的分析需要引进大量的几何知识．例如，曲线的切线和法线，重心甚至于坐标变换．

我们还可以考虑更常见的例子，如通过圆形截面软管的水流，想象把软管垂直地悬挂起来，喷嘴朝下，水流平稳地通过它．这个系统关于通过软管中心的垂直轴呈圆形对称．的确，假如水流速度足够慢，软管保持在垂直的位置，仍然保持圆形对称．

但是，假如把水龙头开得更大，软管就开始摇动．实际上一共有两种摇动，一种是像摆一样左右摆动，另一种是兜着圆圈，喷出的水成螺旋形．当孩子清洗家用汽车时，常常观察到同样的效果．这两种摇摆都不具有关于垂直轴的圆形对称．实际上，它们以两种方式破坏这种对称性，它们还破坏另一种不太明显但非常重要的对称性：关于时间的对称性．原来平稳的流动在每一

时刻看起来都完全一样，而振动的水流就不一样．但是，时间对称性并没有完全丧失，两种摆动都是周期运动，因此，在周期的整数倍的时刻来看，看起来完全相同．这表明平稳状态的连续的时间对称性退化成周期 1 的离散对称性．

对称性破缺在生物学中很重要．当球形对称的蛙卵发育时，它分裂为两个细胞，球形对称性被破坏．在生育的后期阶段(图 14)，又形成球形对称的细胞团——囊胚；它首先发育成圆形凹 [210]
痕(原肠胚)，只具有圆形对称性，然后成神经折，它只有双边对称性．

从数学上讲，在原肠胚期一个圆形凹痕的发育同球壳压弯(图 11)完全类似．这表明对称破缺现象的完全不同的物理实现，可能具有同样基础的数学结构．由此，明显可以看出，数学对科学的统一作用，而这只是数学最突出最重要的特点之一．

这直接引导到推动我们研究的问题：为什么老虎它具有大致圆柱形的对称，具有条纹？布莱克不朽的诗篇并没有给我们提供有用的线索．

图灵的老虎

关于老虎有条纹的理论可以追溯到阿兰·图灵(Alan Turing)，他更以现代计算的奠基人物而著称，图灵知道，化学变化产生颜色的变化．引起条纹产生的不一定是真正的有色物质，而更像是它的前体，它在老虎发育的较早阶段就已形成，其后引发产生条纹的一系列化学变化．不过，生物学上的细节(有些仍有争议)对我们并不重要．我们的目标只是用我们熟悉的题目来说明模式形成的某些简单而普遍的数学机制．

图灵写下这类化学变化的方程．[29]他求出其数值解，并把结果绘成图．他经常拉住他的朋友给他们看这些图，其中有些画上有条纹，其他的有不规则的斑块．图灵会颇为激动地问："这些看来不像母牛身上的标记吗？"

阶段序号	18°时的时龄		阶段序号	18°时的时龄		阶段序号	18°时的时龄	
1	0	未受精	7	7.5	32 细胞	13	50	神经板
2	1	灰色新月形	8	16	卵裂中期	4	62	神经折
3	3.5	两细胞	9	21	卵裂晚期	15	67	转动
4	4.5	四细胞	10	26	背唇	16	72	神经管
5	5.7	八细胞	11	34 2	原肠胚中期	17	84	尾芽
6	6.5	十六细胞	12	4	原肠胚晚期			

图 14 蛙胚发育过程中对称性的创造和破坏：球对称破坏，然后又得到恢
[211] 复，接着又破坏形成圆形对称，再形成双侧对称.

他的计算表明，像条纹或斑点可以由一种不稳定的机制产生．想象一张平面（数学的虎皮）均匀分布某种化合物，随着时间流逝，这就会产生颜色均匀的老虎，全都是灰褐色，更像一只山狮．但是化合物的分布不一定保持均匀，它能发生变化．化合物能有两种类型的变化，化合物可以在某些地方发生反应，反应从一个地方到另一地方扩散．

这两点变化互相竞争，化学反应力图改变化合物的比例，扩散力图使化合物处处均匀．数学表明，如果不同影响互相竞争，结果常常达成某种妥协．这里最简单的妥协就是均匀分布的化合物开始形成涟漪．假如不稳定只在一个方向上产生，则涟漪只 [212]
向一个方向，我们就得到条纹，假如沿着垂直方向又出现另一种不稳定性，则沿着条纹本身也出现小的波动，并分解成斑点（图15）．老虎与豹的根本差别可能就在于相互竞争的不稳定性．

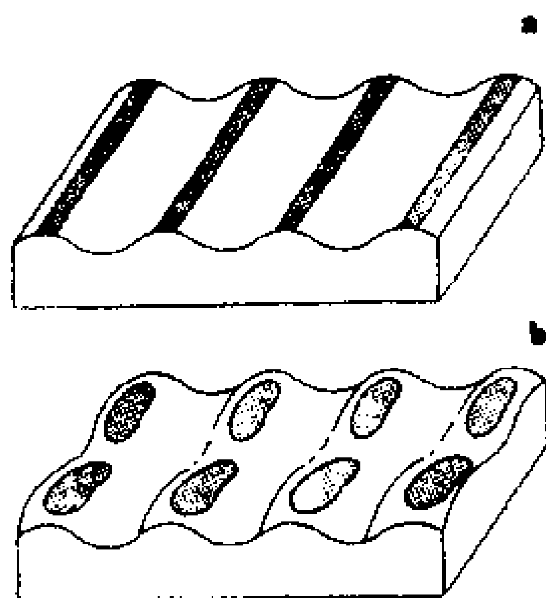


图 15 竞争的化学力导致不稳定，图(a)中，一个方向的不稳定导致条纹，图(b)中两个方向不稳定，把条纹分解成斑点．

任何学校的化学实验室都能演示，能够生成周期模式（螺旋线目标模式）的化学反应（图 16）．其中最著名的是所谓贝留索夫（Belousov）—扎包廷斯基（Zhabotinskii）反应．[21]学生们可以分

[213] 析这些模式来求其数学结构.(例如它是一种什么样的螺旋线?)它们也可以用计算机软件包来解不同形状区域的反应—扩散方程,看看出现哪一种模式(图 17).

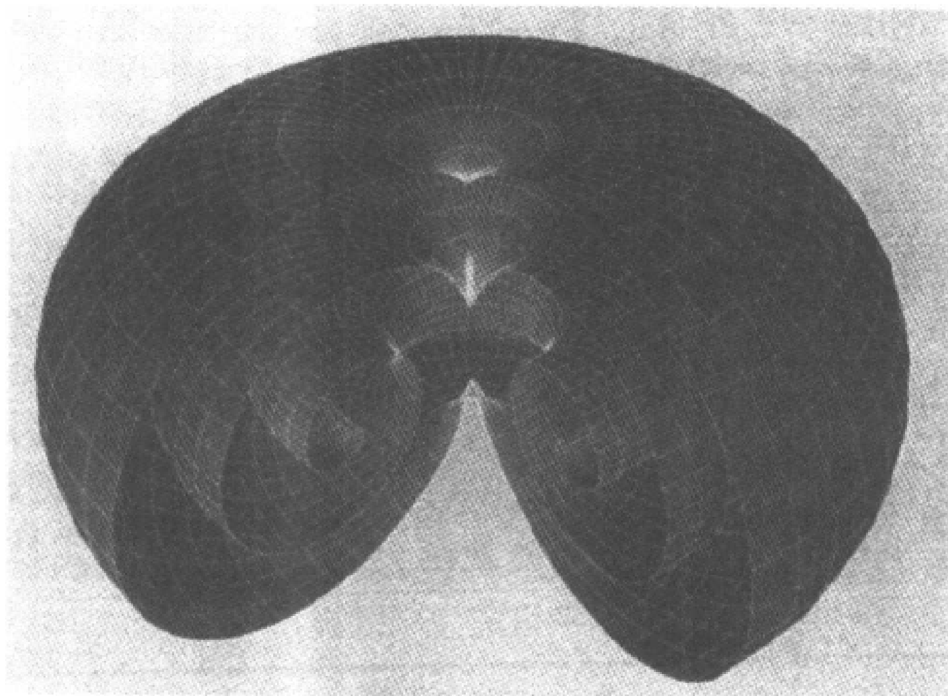


图 16 由反应(改变化合物的成分比例)和扩散(恢复均匀性)两种互相冲突的作用在化学反应中创造出螺旋形涡卷波.

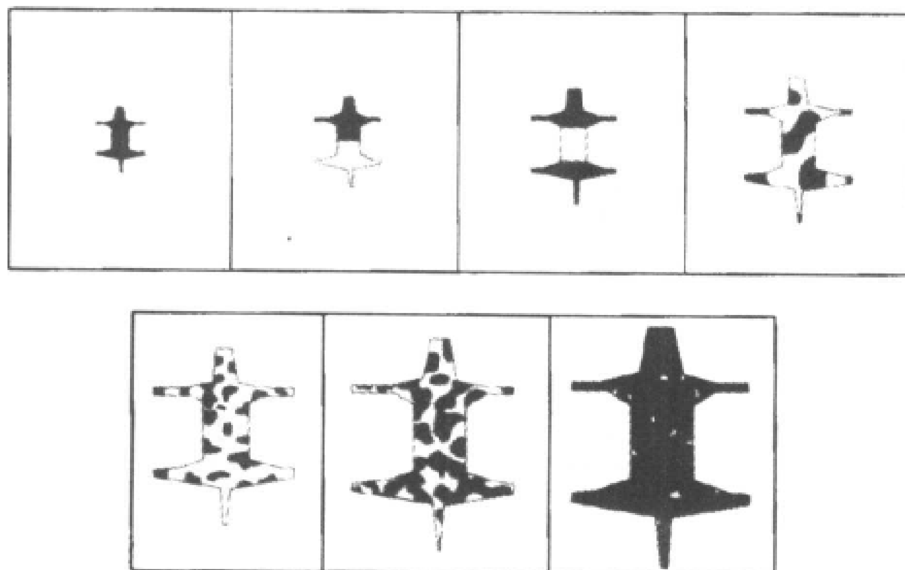


图 17 小孩利用简单的计算机软件包也能探索不同形状区域中的反应—扩散.

由反应和扩散的竞争所形成的模式提供了对称性破缺的良好范例.化合物的初始的均匀分布比条纹或斑点或螺旋有更大的对称性.对称性破缺是自然界的模式极为共同的来源.除了模 [214]
式变化之外,对称性破缺还有什么别的东西?

控制上色的化合物如何通过老虎尾巴扩散的计算机模型产生出看来真实的斑点分布(图 18).长而细的条纹要比短而粗的条纹更不稳定,更容易分解成斑点.[16]这个数学结果有助于解释我们通常观察到的事实:有斑点的动物可能有一条有条纹的尾巴,可是有条纹的动物决不可能有带斑点的尾巴.

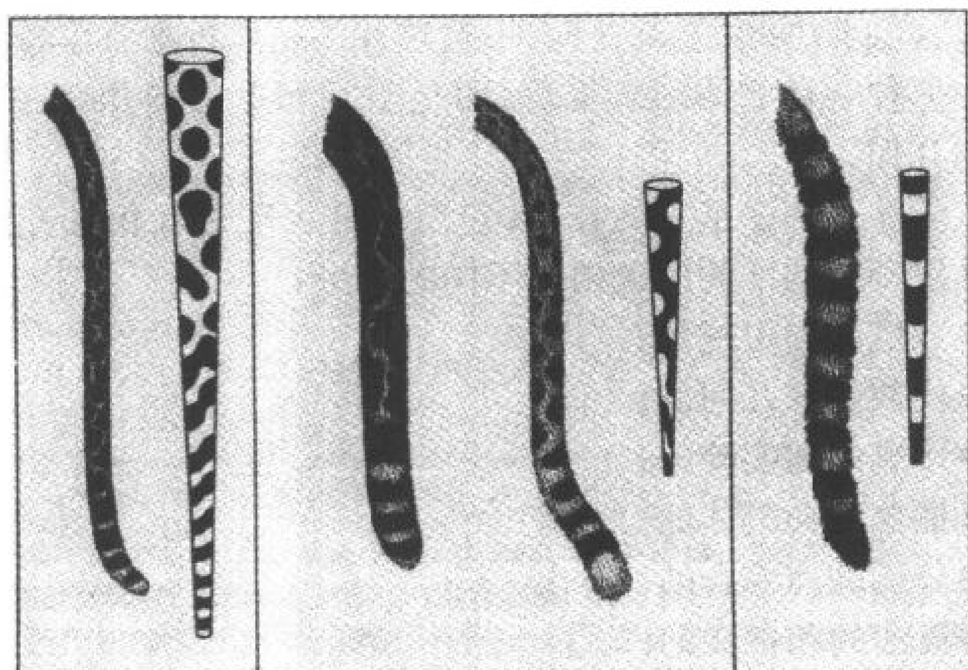


图 18　动物皮肤上的模式的计算机模型表示现实见到的结果,它们还表示窄长条纹通常分解成斑点.

结　　论

变化是对每个人有直接影响的现象,它影响个人生活、国民经济乃至整个行星的未来.直到最近,我们对于变化的理解大都来自传统的工具微积分以及更高级相关数学,而且局限于物理

科学,因为物理科学中可以进行精确的数值测量.

计算机一开始用来推广微积分的方法,使之可能去求解更困难的问题."嘎扎嘎扎地计数"形象地说明这种方式.但是,当今的计算机比起嘎扎嘎扎地计数来要能干得多得多.特别是它们可以用图象来表示数据和处理数据.同时今天数学的另一项发展是远远超出只是讨论数的范围.它还讨论结构的特征,多维空间,变换,形状,形式等等,简而言之就是模式.

当微积分发明之时,它同几何携手一起发展.经过几个世纪,几何的推理被更强有力的,但信息更少的解析方法所取代.公式受到更多强调.现在当我们深入到单有公式也无能为力的领域时,我们又回来强调几何,不过这并不是那种通常学校教的几何中那种不自然的形式推理,而是空间和形状的几何——看得见的几何.

数学涉及许多基本的技巧,它们常常表现为互相补充的方法来提供解决同样的问题两个不同的方法:

- 数值的和可视的;
- 代数的和几何的;
- 形式的和实验的;
- 抽象的和具体的;
- 分析的和综合的;
- 算法的和存在的;

[215] ● 概念的和计算的.

数学——模式的科学——本身也正在经历着变化.为了我们的未来,我们必须把数学同变化的模式紧密地联系在一起.为此,我们必须改变数学教学的方式,为的是培养起来能够感知和处理新模式的新一代.

参考文献和推荐读物

1. Abraham, Ralph and Shaw, Christopher D. *Dynamics: The*



Geometry of Behavior, Volumes 1 – 4. Santa Cruz, CA: Aerial Press, 1983.

2. Arnold, V.I. *Catastrophe Theory*. New York, NY: Springer-Verlag, 1984.
3. Becker, Karl-Heinz and Dörfler, Michael. *Dynamical Systems and Fractals: Computer Graphics Experiments in Pascal*. Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1989.
4. Beltrami, Edward. *Mathematics for Dynamic Modelling*. Boston, MA: Academic Press, 1987.
5. Crutchfield, James P.; Farmer, J. Doyne; Packard, Norman H.; Shaw, Robert S. "Chaos." *Scientific American*, (December 1986), 38 – 49.
6. Curie, M.P. "Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique." *Journal de Physique*, 3, Series, (1894) 393 – 415.
7. Devaney, Robert L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Menlo Park, CA: Benjamin-Cummings, 1986.
8. Devlin, Keith. *Mathematics: The New Golden Age*. London, England: Penguin, 1988.
9. Ekeland, Ivar. *Mathematics and the Unexpected*. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1988.
10. Garfunkel, Solomon and Steen, Lynn A. (Eds). *For All Practical Purposes*. New York, NY: W.H. Freeman, 1988.
11. Gleick, James. *Chaos: Making a New Science*. New York, NY: Viking Press, 1987.
12. Golubitsky, Martin; Stewart, Ian; Schaeffer, David G. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Volume 2*. New York, NY: Springer-Verlag, 1988.

13. Hargittai, István and Hargittai, Magdolna. *Symmetry Through the Eyes of a Chemist*. Weinheim, FRG: VCH Publishers, 1986.

14. Mandelbrot, Benoît. *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco, CA: W.H. Freeman, 1982.

15. May, Robert M. "Mathematical aspects of the dynamics of animal populations." In Levin, S.A. (Ed.): *Studies in Mathematical Biology*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1978.

16. Murray, James D. "How the leopard gets its spots." *Scientific American*, 258 (March, 1988), 62-69.

17. Peitgen, Heinz-Otto and Richter, Peter H. *The Beauty of Fractals*. New York, NY: Springer-Verlag, 1986.

18. Peterson, Ivars. *The Mathematical Tourist*. New York, NY: Freeman, 1988.

19. Poston, Tim and Stewart, Ian. *Catastrophe Theory and Its Applications*. Boston, MA: Pitman, 1978.

20. Poston, Tim and Woodcock, A.E.R. "On Zeeman's catastrophe machine." *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 74 (1973), 217-226.

21. Prigogine, Ilya. *From Being to Becoming*. San Francisco, CA: Freeman, 1980.

22. Stewart, Ian. *The Problems of Mathematics*. Oxford, England:
[216] Oxford University Press, 1987.

23. Stewart, Ian. "The nature of stability." *Speculations in Science and Technology*, 10 (1988), 310-324.

24. Stewart, Ian. *Does God Play Dice? The Mathematics of Chaos*. Oxford, England: Blackwell, 1989.

25. Stewart, Ian. "Chaos: Does God Play Dice?" 1990 *Yearbook*

of Science and the Future. Chicago, IL: Encyclopaedia Britannica, 1989, 54 – 73.

26. Stewart, Ian. "Dicing with death in the solar system." *Analog*, 109 (1989), 57 – 73.
27. Thompson, D'Arcy. *On Growth and Form*, *Volumes 1 & 2*. Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1942.
28. Thompson, J.M.T. and Stewart, H.B. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1986.
29. Turing, A.M. "The chemical basis of morphogenesis." *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 237, Series B (1952), 37 – 72.
30. Wisdom, J. "Chaotic behaviour in the solar system." In Berry, M.V.; Percival, I.C.; Weiss, N.O. (Eds.): *Dynamical Chaos*. London, England: The Royal Society, 1987, 109 – 129.
31. Zeeman, E.C. "A catastrophe machine." In Waddington, C.H. (Ed.): *Towards a Theoretical Biology*, *Volume* 4. Edinburgh, England: Edinburgh University Press, 1972, 276 – 282. [217]

（胡作玄）

传　记

托马斯·班卓夫　曾任布朗大学数学系教授23年之久. 1960年由圣母大学毕业,1964年由加州大学伯克利分校获博士学位.他曾在阿姆斯特丹大学任富尔布赖特研究员以及在哈佛大学任本杰明·皮尔斯讲座教师.班卓夫著有大约50篇(部)论文和专著,主要论述几何学,其中许多具有计算机图形学做的插图.他与查理士、施特劳斯合拍的影片"超立方体:投影和切片"曾获国际多种奖.班卓夫最新著作《超越第3维:几何学,计算机图形学和更高维数》已作为《科学美国人丛书》之一出版.1988年,他曾获数学论述的莱斯特福特奖,并获狄金森学院的约瑟夫·普里斯特别奖章.

詹姆斯·费　从1969年起,他任马里兰大学(学院公园)课程和教育以及数学教授.他由威斯康星大学获得数学学士学位,其后获数学教育硕士学位.1968年由哥伦比亚大学教师学院获数学教育博士学位.在马里兰大学,费教数学的内容与方法课
[219] 程,目的是培养教中学数学的未来的和在职教师.他的主要研究兴趣是发展改革的数学课程.过去十年工作集中于开发使用计算器和计算机为学习和解决问题工具的课程.费是1992年度NCTM计算器年鉴的编辑.

大卫·莫尔　是普尔杜大学的统计学教授,从1967年起他

在那里任职.他由普林斯顿大学获学士学位,由康奈尔大学获博士学位.莫尔写过多篇研究论文和几本书,是许多顶尖期刊的编辑,曾是国家科学基金会的统计学计划负责人.他是美国统计学协会和数理统计研究所的研究员,还是国际统计学会成员.莫尔对统计学教育有持续的兴趣,例如,他是公共广播公司的电视教材"对抗机遇:统计学内幕"的执笔者,他还是广泛使用的初级教科书《统计学实践导论》的作者之一以及《统计学概念和争论》的作者.

玛乔丽·塞内查尔　1965年由伊利诺技术学院获得博士学位,她从1966年起在斯密司学院教课,现任路易斯·沃尔夫·卡恩(Louise Wolff Kahn)讲座教授,她的研究领域是数学结晶学,这是一个跨多领域的学科,主要集中于对平面和空间的几何模式进行分类.特别是《晶体的对称性:非正式的引论》的作者,这是一本给物理学家、数学家和冶金学家的专著.她另外的专业兴趣还有科学史和几何学教育.她同化学家乔治·弗莱克(George Fleck)一起于1973年组织第一届对称性活动节,同时是《对称性的范式》的编辑之一,这是该节上的论文集.1984年,他们组织跨学科的几何学活动节,这导致文集《用多面体组成空间》问世.

林恩·阿瑟·斯蒂恩　明尼苏达州诺斯费尔德的圣·奥拉夫学院数学教授.1965年由麻省理工学院获得博士学位,之前在爱荷华州的路德学院获学士学位.斯蒂恩是10本书的编者或作者,其中包括《人人都会算》、《新世纪的微积分》、《今日数学》、《拓扑学的反例》等.他在《教育领导》、《代达路斯》、《科学的美国人》、《科学新闻》和《科学》等期刊上发表许多关于数学,计算机科学和数学教育的文章.他是明尼苏达州数学动员会主席之一, [220]
还是《美国数学月刊》的图书简评编辑以及大学数学大纲委员会

(CUPM)主席.前些年他曾任美国数学协会主席,美国科学促进会A组(数学)秘书以及数学科学成人补习委员会主席.

伊恩·斯图尔特 1945年生于英格兰的福尔克斯通,他在剑桥大学学习,1966年获学士学位,后去沃利克大学,于1969年获博士学位.他曾在图宾根大学、奥克兰大学、康耐提格大学和休斯敦大学任教,现任沃利克大学高级讲师.他的研究领域是非线性系统的分岔理论.他写了大量书籍,其中包括《近代数学的概念》、《数学问题》、《上帝掷骰子吗?》、《游戏、集合和数学》,他是《数学情报员》的欧洲编辑,并给《科学的美国人》、《新科学家》、《科学》撰写数学的论文.他的专栏《数学大观》定期发表在法文版、德文版、意大利文版、西班牙文版和日文版的《科学美国人》上.他还参加电视工作,并在英国广播公司定期简短的广播
[221] 中露面.

(赵慧琪)

索 引

A

Abbott, Edwin Abbott 艾博特,埃德温·艾博特 30,49
Absolute value 绝对值 33
Accelerated variation 加速变化 72
Accumulations 累积值 26,27
Algebra 代数 1,3,4,22,37,39,52,62,65,66,70,72,73,74,82,84,87,88
Algebraic expressions 代数表达式 62,64,74,77,80,85,86
Algorithms 算法 7,8,33,36,39,64,65,77-78,80,83,84,89
  application of ~的应用 78
  bisection 二分法 34
  combination counting 组合计数 50
  computer-based 基于计算机的~ 78
  defined 确定的~ 77
  design of ~的设计 78
  development in schools 在学校中的发展 77
  everyday 日常~ 33-35,36,39
  "paper and pencil," "纸笔" 64
  theme in mathematics 数学中的主题 7
Applications 应用
  algorithms 算法 78
  measurement 测量 89
  modeling 建模 89
  quantification 量化 65
  school mathematics 学校数学 88-91
Archimedes 阿基米德 16,84
Area 面积 12,16,17,24,67
  circle 圆~ 22,23
  and pi ~和 π 35
  rectangle 矩形~ 17
  right triangle 直角三角形~ 16
  scalene triangle 不等边三角形~ 16
  square 正方形~ 35

Arnheim, Rudolph 阿恩海姆,鲁道夫 170-171
Astrology 占星术 62
Astronomy 天文学 198
Average value 平均值 26,27

B

Bayes' theorem 贝叶斯定理 128
Bayesian inference 贝叶斯推断 127,128;参见 Classical inference, Inference
Belousov-Zhabotinskii reaction 贝留索夫-扎包廷斯基反应 213
Bias 偏差 131
in data 数据中的~ 114
Binomial 二项
coefficient ~系数 52,53
distributions ~分布 122,125
Biological instability 生物不稳定性 212
Blastula cells 囊胚细胞 210
Boxplots 框图 见 Displaying data

C

Calculators 计算器 65,99,100
as complement ~作为补充 78,79
graphing 绘图 75
influence of ~的影响 63,64
in schools 学校中的~ 63
Calculus 微积分 4,7,13,14,19,28,35,50,184,215,216
and formulas ~和公式 196
Cantor set 康托尔集 204
Cartesian graphs 笛卡儿图象 76
Catastrophe machine 突变机 208
Causation 因果性 111
Cavalieri's principle 卡瓦利埃利原理 18
Celestial body dynamics 天体动力学 198
Center 中心 107,111,114
Central limit theorem 中心极限定理 125
Chance 机遇 95,97-99,136;参见 Confidence Intervals, Inference, Outcomes, Probability, Randomness, Significance tests
Change 变化
calculus and 微积分和~ 184
computer graphing of 用计算机描绘~ 184
identifying patterns in 鉴别~中的模式 183
implications 后果 215
in mathematical research 数学研究中的~ 7
mathematicians 数学家 188
in mathematics 数学中的~ 2,184-189
models in calculus 微积分中的~模型 184
natural 自然~ 183

planetary motion 行星运动 198 – 206
population 群体 189 – 198
representation of ~的表示 184
in school curriculum 学校课程中的~ 2,188
teaching of ~的教学 187
universal concept 普遍概念 189
Chaos theory 混沌理论 143,187
Cheops, pyramid of 胡夫金字塔 20
Circumference 外周 23,35
Class data 类数据 112
Classical inference 经典推断 127;参见 Bayesian inference, Inference
Classification 分类
development of skills ~技术的发展 146
in schools 学校中的~ 147
of shape 形状的~ 147 – 148
Combinations, counting 组合,计数 50,51,52 – 53
Combinatorial 组合
networks ~网格 160
properties ~性质 143 – 144
tools for patterns 模式的工具 160
Combinatorics 组合学 122
Comparative randomized experiments 比较随机化实验 117
Complete graph 完全图 51
Complex numbers 复数 86 – 87
Computational machines 计算机 63
Computers and computing 计算机和计算
algorithms 算法 78
analysis 分析 186 – 187
animation 激发 32
as complement 做为辅助工具 78,79
coordinates and 坐标和~ 39
geometry in schools 学校中的几何学 175
graphics 图形学 2,14,30,161,167 – 168,184 – 185
mathematics 数学 64
models 模型 89,214 – 215,216
new number systems 新的数系 87
reaction patterns 反应模式 213
representation 表示 76 – 77
shape simulation 形状模拟 177
simulation of planets 行星的模拟 198
software 软件 75
statistical 统计 99,100,102
wraparound 全景屏幕 38
参见 Calculators, Displaying data, Representation, Visualization
Conceptual knowledge 概念知识 73,78 – 79

Conditional probability 条件概率 122-124,128
modeling 建模 123
参见 Probability
Cones 圆锥
drawing 绘图 32
slicing 切片 48
volume of ~的体积 14,15
Confidence 置信
intervals 区间 129-131;参见 Bayesian inference, Classical inference, Inference, Significance tests
statements 命题 129,130
Configuration spaces 位形空间 41-45
Conic sections 圆锥曲线 48
Connections, in mathematics 联系,数学中的 5-7
Conservation of energy 能量守恒 203
Context, in statistics 上下文,统计中的 96,101
Continuity 连续性 见 Topology
Continuous approximation to discrete phenomena 离散现象的连续逼近 194
Contour mapping 轮廓映射 50
Converging variation 收敛变化 72
Convex deltahedra 凸三角多面体 155
Coordinates 坐标 32,33,36-45
descriptions 描绘 41
dimension 维数 32
geometry, in higher dimensions 高维几何学 39
graphs 图象 75
Correlation coefficient 相关系数 111
Counting games 计数游戏 36
Coxeter, H.S.M. 考克斯特 158
Crick, Francis 克里克,法兰西斯 154,155
Cross-sectional slices, determination of 横截切片,决定 47
Crystals 晶体 155-157
Cubes 立方体 11,28,29,30,31,32,40,47,53,178
counting of 计数 53-58
drawing 绘制 28
in Froebel's kindergarten 弗洛贝尔幼稚园中 24
isometric projection 等距投影 28
learning tools 学习工具 157-158
orthographic projection 正交投影 28,29
slicing 切片 47
Cubic kaleidoscope 立体万花筒 153
Curie, Pierre 居里,彼埃尔 206,207,208
Curriculum 课程 77,88,92,95,

136,171－180
data 数据 96－97
design 设计 66
development 发展 66
future of ～的未来 66
quantification skills 定量化技术 62－65,77－79,92
参见 Teaching
Cyclical variation 循环变化 72
Cylinders 圆柱 11
and discs ～和圆盘 22
drawing 绘制 32
slicing 切片 47

D

Data 数据 95,96－97,98,99,100,101,103,104
curriculum 课程 96－97
definition of ～的定义 96
experiment 实验 112
measurement 测量 113
numbers in context 在上下文中的数 96
Data analysis 数据分析 102,103－111,115,119,126
teaching of ～的教学 112
Data bases 数据基 65
Data production 数据产生 102,103,111－118,135
Decomposition 分解
models 模型 17－18,47,49
slicing 切片 46－50
Decorated cubes 修饰立方体 153
Density 密度 16
Deterministic 决定论的
chaos 混沌 195
phenomena, and change 现象,和变化 8;参见 Change
Diagnostic methods 诊断方法 99
Difference equation (dynamic) 差分方程(动力学的) 193,196
Differential equations 微分方程 105
Dimension 维数 11,12,13,25,30,31,32,33,36,37,39－44,49,53,58,62,91
Dimensional analysis 因次分析 91
Dimensionality 维数性
and change ～和变化 8
configuration spaces 位形空间 44－46
dynamic events 动力事件 44－46
similarity 相似性 20
Dimension 维数 11,12,13,25,30,31,32,33,36,37,39－44,49,53,58,62,91
Direct and inverse variation 正变化和逆变化 72
Direction-giving 给定方向
as part of learning 做为学习的一部分 36－37
Dirichlet domains 狄利克雷区域

156,157
Discontinuities 不连续性 200
Discrete 离散
mathematics 数学 184
system, dynamic 动力系统 193
Displaying data 显示数据 27,28, 104 - 105
boxplots 框图 104,108
for children 给孩子们~ 105
drawing 绘图 164
graphic displays 图象显示 104
histograms 矩形图 104
mathematical models 数学模型 104
stemplots 干形图 104
参见 Computers and computing, Representation, Visualization
Dissection 剖分 158 - 160
Distribution patterns 分布模式 105
DNA 脱氧核糖核酸 148,154
Double helix 双螺旋 148
Dr. Matrix 矩阵博士 61
Draft lottery (1970) 征兵抽签 (1970) 132 - 134
Drawing 绘制
cubes 立方体 28
as representation of shape 做为形状的表示 164 - 166
参见 Cubes, Displaying data
Dynamical systems 动力系统 192 - 194

E

Earth, as two-dimensional surface 地球,做为二维曲面 37
Edgerton, Samuel 埃治通,塞缪尔 168 - 170
Egyptian monuments, as geometrical examples 埃及建筑,做为几何例子 20 - 21
Electron microscope 电子显微镜 171
Elements 《原本》 141,176
Elevator geometry 电梯几何学 39
Equations 方程 70
Escher, M.C. 艾舍尔 165
Euclid 欧几里得 7,43,64,77, 139,140 - 141,175,176
Euler's Theorem 欧拉定理 161
Evolution, of number system 演化,数系的 74,81
Executive toys 操纵玩具 199
Experimentation, in place of proof 实验化,替代证明 185
Exploratory data analysis 探查数据分析 41,76,104
Exponential growth 指数增长 190,191,197

F

Fermat's principle 费尔马原理 179
Fields 域 84

Flatland 《平国》 30,49
Foreshortening 前缩
in cube drawing 立方体绘制中的～ 28,31
参见 Cubes
Four-dimensional cubes 四维立方体 30;参见 Hypercube
Fourth dimension 第四维 13,23,30
Fractals 分形 25－26,143,204
Froebel, Friedrich 弗洛贝尔,弗利德里希 11－12,14,15,17,24,28,31,46,47,58
Fruit fly experiment 果蝇实验 195
Fundamental change 基本变化 7

G

Galileo 伽利略 7,168,169,170,198
Gauss 高斯 2,51,87
Geometric gifts, Froebel's 弗洛贝尔的几何礼物 14,46,47,58
Geometric 几何的
patterns 模式 139
preparation of students 学生的准备 20
series 级数 25
Geometry 几何 1,2,11,12,13,14,17,22,25,26,32,35,37,38,39,43,50,173
analytic 解析～ 13
and children ～和孩子们 11
implications of new approach 新方法的后果 215
plane 平面～ 12
in schools 学校中的～ 174－176
solid 立体～ 12,13
Globes 地球仪 161－163
Gombrich, E.H. 冈布里希 143,169
Graphical representation 图象表示 74－75,108,109,191
confidence intervals 置信区间 129;参见 Computers and computing, Displaying data, Representation, Visualization
Greek mathematicians 希腊数学家 16,64,74,140－141,168,175
Grouping 分组 55
Growth 增长
exponential 指数～ 25,190,191,197
factors 因子 25
linear 线性 190
model 模型 190
phenomena, and change 现象和变化 190
Grünbaum and Shepherd 格林鲍姆和舍菲尔德 149

Grünbaum, Branko 格林鲍姆,布兰科 139,164,165

H

Harriot, Thomas 哈里奥,托马斯 169
He Built a Crooked House 《他盖了一所弯曲的房子》 30
Heinlein, Robert 海因莱因,罗伯特 30
Helix 螺旋线 147－148
Hexahedra 六面体 160
Higher dimensional spaces 高维空间 39
Hindu mathematicians 印度数学家 74
Hypercube 超立方体 30－31,32,40,50,53－56
The Hypercube: Projections and Slicing 《超立方体:投影和切片》 50
Hyperion 许珀里翁 203
Hypersphere 超球 49
Hypothesis testing 假设检验 134

I

Icosahedron 二十面体 155,164,165
Image reconstruction 图象重建 166－167;参见 Representation, Symmetry, Topology, Visualization
Independent trials 独立试验 118,119
Induction 归纳 见 Mathematical induction, Natural numbers and integers, Principle of Finite Induction
Inequalities 不等式 70
Inference 推断 98,102,103,112,122,126,127－134;参见 Chance, Confidence intervals, Significance tests
Instruction-giving, as part of learning 给出指令做为学习的一部分 36－37
Integers 整数 见 Natural numbers and integers
Isometric projection, for drawing cubes 等距投影,画立方体 28;参见 Cubes, Foreshortening, Orthographic projection

J

Jupiter 木星 201,205,206

K

Kaleidoscope 万花筒 5,151
  exploration of symmetry 开发对称性 5
Kelvin, Lord 凯尔文勋爵 61
Kindergarten 幼稚园 11,17,24,28,47,58;参见 Froebel, Geometric gifts

Kirkwood gaps　寇克伍德间隔　205
Knots　纽结　144,147
Kolmogorov vague attractor　柯尔莫哥洛夫吸引子　185

L

Lagrange points　拉格朗日点　203
Language of mathematics　数学语言　8
Latitude　纬度　37,39
Lattice　格子　155-158
  one-dimensional　一维～　156
  two-dimensional　二维～　156-157
  three-dimensional　三维～　157-158
Law of Large Numbers　大数定律　125
Law of Motion　运动定律　198
Law of the Iterated Logarithm　迭代对数律　118
Learning and Teaching Geometry　《学和教几何学》　175
Least squares regression　最小平方回归　111
L'Engle, Madeleine　郎格，曼德林　30
Lenses　透镜　163-164; 参见 Representation
Levels of analysis　分析的水平　190-192
Linear algebra　线性代数　62,65; 参见 Algebra, Algebraic expressions
Logistic curve　后勤曲线　198
LOGO　LOGO　37
Longitude　经度　37,39
Lorenz attractor　洛仑兹吸引子　185,188

M

Man-made patterns　人工模式　148
Mandelbrot set　曼德尔布洛集　26,185
Manipulatives　操作　14
Mapping　映象　168
  of quantities　量的～　90
Maps　地图　161,162,163; 参见 Displaying data, Representation, Visualization
Mars　火星　205,206
Mathematical　数学的
  abstractions　～抽象　3
  actions　～作用　3
  attitudes　～态度　3
  attributes　～属性　3
  behaviors　～行为　3
  classification　～分类　141
  dichotomies　一分为二　4
  induction　～归纳法　82-84
  modeling for change　变化的～建模　196
  models　～模型　109-111,161

– 163,178,184,196
strands ~线索 4
structures ~结构 3
Mathematics 数学
comparison with linguistics 与语言学比较 14
curriculum 课程 62,63,65,66,77,88,91 – 92,95,96 – 97,136
fundamentals of ~基础 3
goals ~目标 62,91 – 92
importance of early learning 早期学习的重要性 14
informal arithmetic 非正规算术 80
maintaining rigor of old style 保持老式的严格 184
pattern and order 模式和秩序 1 – 2
as a pipeline 做为管线 4
public perception of 公众的 1
and science ~和科学 184
statistics in schools 学校中的统计学 95 – 96,100
variety in new approach 新方法的多样性 184
Mathematics of change 变化的数学 184
levels of description 描述的层次 188 – 189
Matrices 矩阵 63,65,87
Maxims and minims 极大和极小 72
Mean 平均值 96,107,110,119,125
Measurement 测度
of dimensions 维数的~ 14;参见 Dimension as recurring theme in mathematics, 6; 参见 Applications, Quantification
Measuring 度量
quantitative concepts 数量概念 91;参见 Quantification
volumes 体积 14,15,16
Median 中位数 107
Meteorites 陨石 198
Mirror geometry 镜面几何 151 – 153; 参见 Geometry, Plane geometry, Solid geometry
Mobius band 莫比乌斯带 145
Modeling 建模 69;参见 Conditional probability
Models 模型 109,161 – 163,178,184; 参见 Displaying data, Representation

N

Naming 命名
importance of technical names 专门名称的重要性 145 – 146
of shapes 形状的~ 145
参见 Classification
Natural 自然

numbers and integers ～数和整数 82,84;参见 Principle of Finite Induction
patterns ～模式 148;参见 Patterns
Network problems and combinatorial properties 网络问题和组合性质 143－144
Newton, Sir Isaac 牛顿,艾萨克,爵士 7,198
Normal distribution 正态分布 109
Number 数
lines ～直线 33－35
sense ～觉 79－80,108
theory ～论 66
use ～应用 67,68－69
Number systems 数系 61,62,81－88,92
algebraic and topological properties 代数性质和拓扑性质 81
evolution of ～的演化 74,81
future of ～的未来 88
new 新～ 87
Numerical 数值
experimentation in change 变化中的～实验 194－196
operations ～运算 69
representation ～表示 73;参见 Displaying data, Representation, Visualization
Numerology 数秘术 62

O

Orbiting patterns 轨道模式 198
Order, in numbers 次序,数中的 68
Organic geometry 有机几何 185;参见 Geometry, Visualization
Orientation of shape 图形的定向 145
Origami 日本折纸 151
Orthographic projection 正交投影 28,29;参见 Cubes, Drawing, Foreshortening, Isometric projection
Oscar Ⅱ, King of Sweden 奥斯卡二世,瑞典皇帝 199,200
Outcomes 结果 97,98,99,120,125;参见 Probability
Outliers 远离中心点 100,106,110
Overall trends 整体趋势 72

P

Paper folding, as a learning tool 折纸,做为学习工具 150－151
Parallelograms 平行四边形 16－17,21
non-square 非正方的～ 29
Pascal's triangle 帕斯卡三角形 53
Patterns 模式

in change 变化中的～ 8,183
in counting 计数中的～ 56
formation of ～生成 149
identification of ～鉴别 1
in mathematics 数学中的～ 8
modeled by numbers 由数建模的～ 61
natural 自然～ 149; 参见 Connections, Mathematical, Mathematics
Pendulums 摆 45
Pentahedra 五面体 160
Perfect whole 完全,整数 151
Period-doubling cascade 周期加倍瀑布 185
Permutations 置换 55
Phase 相
portraits, multidimensional change ～图,多维变化 202－203
space ～空间 201－202
Pi, mathematical constant π,数学常数 15,23
definition of π的定义 35
estimation of π的估计 35－36
Piaget 皮亚热 144
Place value 位值 74,80
evolution of ～的演化 74
notation 记法 74
numerals 数码 74
Plane geometry 平面几何 12,13,14;参见 Geometry
Planes and surfaces 平面和曲面 36
Planetary motion 行星运动 198－206
Poincaré, Henri 庞加莱,亨利 2,199,200－202
Polyhedra 多面体 144,145,147,151,154,155,158,159,160,161,173,178
slicing of ～的切片 48
Polynomials 多项式 63,81,84,85,86,87;参见 Number systems, Principle of Finite Induction
Polytopes 多胞形 158
Popular Science 《大众科学》 106
Population dynamics 群体动力学 189－198
Predicting outcomes 预见后果 97,98,99;参见 Probability
Prime factorization theorem 素因子分解定理 84
Principle of Finite Induction 有限归纳法原理 82,83;参见 Natural numbers and Integers, Number systems, Rational numbers, Real numbers
Probability 概率 68,95,98,102,103,109,110,118－128,132－136
basics 基础 120
conditional 条件～ 122－124,128

question ～问题 132
runs 连串 120－121
theory for children 教孩子们的～论 98－99
Problem solving 求解问题 99
Procedural knowledge 过程知识 73,78－79
Properties 性质
of number use 数应用的～ 69
of reflected shape 反射图形的～ 151;参见 Shape, Symmetry
Provided data 提供的数据 112;参见 Data
Psychological research 心理学研究 见 Quantification
Pyramids 棱锥 15,18,19,20,21,50
slicing of 切片 48
Pyrite crystal 黄铁矿晶体 见 Decorated cubes
Pythagorean theorem 毕达哥拉斯定理 17,40,42,43,85
Pythagoreans 毕达哥拉斯学派 61

Q

Quantification 量化
applications 应用 65
attributes 属性 61
coding 编码 67
data and children 数据和孩子们 62
everyday 日常～ 79
fundamental concepts 基本概念 66
information 信息 65
interpretation of ～的解释 62,79－80
literacy 数量技能 65,90
measuring 测度 14,67
ordering 次序 67
order of magnitude 数量级 79
psychological research 心理研究 66
reasoning 推理 62,67,92
relationships 关系 66,72
school curriculum 学校课程 62－65,77－79,92
technology 技术 62
of variation 变化的～ 135
Quartiles 四方砖 107
Quartz crystals 石英晶体 155

R

Radio telescope 射电望远镜 171
Random variables 随机变量 125,126,127;参见 Randomness
Randomness 随机性 97,98,99,115,116,117,120,124－127,128,129－134
in outcomes 结果的～ 98,120,125
in sampling 抽样的～ 115－117,124－127,129－134;参

见 Confidence intervals, Inference, Outcomes, Probability, Significance tests, Uncertainty
Rate 率 26－28,113
of change 变化率 70,72
Ratio 比 35,203,205
and proportion ～和比例 20,22,23
Rational numbers 有理数 84,85,86
Real numbers 实数 84－85,86
Recurring concepts 反复提到的概念 8
Regular polyhedra 正多面体 154－155
discovery of 发现～ 140
参见 Polyhedra
Relativity theory 相对论 43,44
Renormalization groups 重正化群 143
Rep-tiles 复制砖 159
Repetition, and change 重复和变化 8
Representation 表示 62,161－168
computer graphics 计算机图形学 167－168
drawing 绘制 164－166
image reconstruction 图象重建 166－167
lenses 透镜 163－164
maps 地图 161－163
models 模型 109,161－163,178,184
of numerical ideas 数值思想 73
shadows 阴影 163－164
参见 Displaying data, Visualization
Resonance 共振 203－204
Rossler attractor 罗斯莱吸引子 185
Rubber sheet 橡皮膜
dynamics 动力学 200
geometry 几何学 144

S

Sampling 抽样 99,115,116,124,127,130
distributions 抽样分布 125,129 参见 Probability, Randomness
Saturn 土星 203
Scale models 标度模型 161,178
Scaling 标度 143
Scatterplot 散点 110 132
Science for All Americans 《为所有美国人的科学》 72
The Sciences 《科学》 170
Scoring, as a learning aid 记分,作为学习的帮助 36
Self-congruence 自全等性 见 Symmetry
Self-similarity 自相似性 142－143,202

in lattices 格子中～ 159
Semiregular polyhedra 半正多面体 155;参见 Polyhedra, Regular polyhedra
Shadow and scale diagrams 阴影和标度图 20
Shadows 阴影 163－164;参见 Representation
Shape 形状,形
aims of study 学习目标 140
analysis 分析 148
applied to the real world 应用于现实世界 171－173
classification 分类 140
in geometry curriculum 几何课程中的～ 175－176,17
importance 重要性 140
interdisciplinary nature 跨学科性质 177
as laboratory science 做为实验室科学 177－179
molecules, crystals, atoms 分子,晶体,原子 148
open-ended study 无止境学习 180
orbital patterns 轨道 146
and pattern, curricular issues of ～和模式,课程的 171
patterns 模式 139
and preschool children ～和学前儿童 141
properties 性质 140,146
protein subunits 蛋白质亚单元 155
viruses 病毒 155
Shear transformations, using Cavalieri's principle 切变变换,卡瓦利埃原理 18;参见 Volume
Sierpinski gasket 西尔宾斯基毯 25
Significance tests 显著性检定 131－134
Silicon chip 硅片 173
Similarity 相似性 20
defined 确定的～ 141
geometry 几何 175
in quantification 量化中的～ 69; 参见 Self-similarity
Simplex, subsimplices 单形,子单形 53
Simulation 模拟 11, 102, 106, 123,126,129,130,134
computer 计算机～ 109,120, 125
Skewness 偏斜度 106
Slicing 切片 46－50;参见 Cones, Cubes, Polyhedra, Pyramids 多面体棱锥球 Spheres
Solid geometry 立体几何 12－13;参见 Geometry, Plane geometry
Spheres 球 43,49

drawing 绘制 32
slicing 切片 47
volume of ~体积 14,15
Spiral 螺旋线 147,148
Spread (dispersion) 扩展(离差) 107,111,114
Squares 正方形 40,53-58
Stable systems 稳定系统 199, 208
Standard deviation 标准离差 108, 109, 110, 125; 参见 Spread
Star Wars 星球大战 101
Statics and dynamics 静力学与动力学 44
Statistical 统计
designs -设计 112,115-118
inference 推断 103;参见 Inference
significance 显著性 132;参见 Inference, Significance tests
uncertainty ~不确定性 133
Statistics 统计学 95,96,97,99, 100,111,113,126,127,134, 135,136
Stepped variation 阶梯变化 72
Stereoscope and stereoscopic pairs 体视镜与体视对 167
Strands, combining multiple 线索,复合 7
Subjective probability 主观概率 128;参见 Inference, Probability
Symbol sense 符号感觉 80-81
Symmetry 对称 5,6,47,55,56, 142-143,206-210
children and 儿童和~ 150, 174
in data 数据中的~ 108
discovering 发现~ 150-151
lattices 格子 156,157
packing arrangements 堆积排列 155
recurring theme in mathematics 数学中反复出现的主题 6
relationships 关系 208
significance and use 意义和用途 153-155
through reflection 反射~ 151-153; 参见 Cubic kaleidoscope, Kaleidoscope
Symmetry breaking 对称破缺 206,208,212,214,215
Symmetry group 对称群 151

T

Taxicab geometry 出租车几何 37,39
Taxonomy of number use 数用途的分类 68;参见 Number use
Teaching 教学 187-188
formal proofs 形式证明 187
random events 随机事件 120
参见 Curriculum

Technology transfer 技术转移 184
Tesseract 超立方体 30;参见 Hypercube
Tetrahedra 四面体 48,16
Tilings and patterns 铺砌与模式 11,149
Time, as the fourth dimension 时间,做为第四维 43
Titan 泰坦 203
Topology 拓扑 144-146,200-202
Torus 环面 38-39
Trapezoid 梯形 29
  as incomplete triangle 做为不完全三角形 20-21
Triangles 三角形
  counting 计数 52
  similar 相似~ 20-21
Truncated pyramid 截断棱锥 20
Tukey, John 塔基,约翰 103
Turing's tiger stripes 图灵的老虎条纹212

U

Ueda attractor 宇田吸引子 185
Ultrasound 超声 171
Uncertainty 不确定性
  and change ~和变化 8
  everyday 日常生活中的~ 98-99
  significance of ~的意义 135-136
  order in ~中的秩序 98
  variation as fundamental skill 做为基本技术的变化 136
  参见 Chance, Inference, Outcomes, Probability, Randomness
Uniform growth 均匀增长 197

V

Variables and relations 变量和关系 69,70
Variance 方差 125
Variation, in process 变差,过程中的 135
Verhulst law 韦于尔斯特定律 193-196
Vertices 顶点 39
Video games as part of learning 电视游戏,做为学习过程 37
Visual 视觉
  imaging of geometry 几何成象 184
  representation, and change 表示 8
Visual Thinking 《可视思维》 170
Visualization 可视化 6-7,8,168-171
  computer-aided 计算机辅助~ 145
  dimensions 维数 24
  of geometric relationships 几何关系的~ 28

in geometry 几何中的～ 49
importance of ～重要性 168
interdisciplinary nature of ～的跨学科性质 171
as interpretation 做为解释 170－171
in learning 学习中的～ 11
multidimensional data sets 多维数据集 41
problems 问题 47
quantitative relationships 定量关系 74
recurring theme in mathematics 数学中反复出现的主题 6
Volume 体积 14－22,26
Cavalieri's principle 卡瓦利埃利原理 18
concept of ～概念 14－16
cone 圆锥 14,15
diagonal decomposition 对角分解 18
displacement 位移 16
in education 教育中的～ 14
incomplete/truncated pyramid 不完全的/截断棱锥 20－21
irregularly shaped objects 不正规形体 16
pyramid 棱锥 15－16,20,21
shear transformation 切变变换
sphere 球 14,15,16
Voluntary response samples 自愿回答样本 115,116

W

Watson, James 华生,詹姆斯 154,155
Wiener, Norbert 维纳,诺伯特 1
Wraparound 卷绕 34,38
A Wrinkle in Time 《时间的皱纹》 30

X

X-ray X射线
investigations ～探查 155,173
tomography ～断层术 50

Z

Zeman, Christopher 齐曼,克里斯托弗 208

致 谢

MATHEMATICAL SCIENCES EDUCATION BOARD
Executive Director, Kenneth M. Hoffman
Staff Coordination, Linda P. Rosen
Senior Project Assistant, Jana Godsey
Senior Project Assistant, Carol Metcalf

NATIONAL ACADEMY PRESS
Editorial Coordination, Sally Stanfield
Marketing Coordination, Barbara Kline
Production Coordination, Dawn M. Eichenlaub
Cover Design, Francesca Moghari
Graphics, James Butler

COMPOSITION COURTESY OF
American Mathematical Society

FINANCIAL SUPPORT
We wish to thank the Carnegie Corporation of New York for support of the development, publication, and dissemination of this document. We also wish to thank the Andrew W. Mellon Foundation for their support of further dissemination.

PHOTOGRAPHS COURTESY OF
Texas Instruments, Inc. (p. 63)
Stan Sherer (pp. 148,152,178)
Marjorie Senechal (p. 149)

COMPUTER ARTWORK COURTESY OF
Thomas Banchoff
Davide Cervone
David Moore

书中插图感谢:

J.Weeks, *The Shape of Space*, Marcel Dekker, Inc. (pp. 143, 144)

P. Stevens, *Patterns in Nature*, Little, Brown & Company (p. 147)

Color Treasury of Crystals, Crescent Books (p. 152)

R.J. Hauy, *Cristallographie*, *Cultures et Civilisations* (p. 156)

B. Grünbaum and G.S. Shephard, *Tilings and Patterns*, W.H. Freeman (pp. 157,159)

N.J.W. Thrower, *Maps and Man*, Prentice-Hall (p. 162)

D. Bruyr, *Geometrical Models & Demonstrations*, J. Weston Walch (p. 164)

"Draftsman Drawing A Reclining Nude," by Albrecht Durer in *Complete Engravings*, *Etchings & Woodcuts*, Courtesy of the Library of Congress (p. 165)

Mathematical Association of America (p. 165)

M.C. Escher Heirs, Cordon Art—Baarn, Holland (p. 166)

B. Grünbaum, "Geometry Strikes Again," *Mathematics Magazine*,

Mathematical Association of America (p. 167)

Thomas Harriot's lunar drawing, July 26, 1609, Petworth Museum (p. 169)

Galileo's lunar drawing, Biblioteca Nazionale (Florence, Italy) (p. 169)

IBM-Almaden Research Center (p. 170)

W.A. Bentley & W.J. Humphries, *Snow Crystals*, Dover Publications (p. 174)

R. Abraham and J. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc. (p. 185)

R. Abraham and C.D. Shaw, *Dynamics: The Geometry of Behavior*, Aerial Press (p. 185)

I. Stewart, *Does God Play Dice?* Basil Blackwell, Inc. (pp. 185, 199,201,205)

J.M.T. Thompson & H.B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, John Wiley & Sons Ltd. (pp. 185,203)

G. Oster in S.A. Levin (ed.) *Studies in Mathematical Biology*, Mathematical Association of America (p. 195)

T. Poston, Pohang Institute of Science & Technology (p. 204)

M. Shumway, "Stages in the Normal Development of Rana Pipiens Ⅰ, Ⅱ," *Anatomical Record*, Alan R. Liss, Inc. (p. 211)

J.M.T. Thompson, *Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering*, John Wiley & Sons Ltd. (p. 211)

A. Winfree and S. Strogatz, *Mathematical Intelligencer*, Volume 7, No. 2 (cover), Springer-Verlag Publishers (p. 213)

J.D. Murray, "How the Leopard Gets Its Spots," *Scientific American*. Illustration by Patricia J. Wynne (p. 214)

译后记

对于每一本书，我们似乎都应该问这样一个问题，为什么要出这本书？换句话说，这本书有没有独立存在的价值？对于我们翻译的这本书，《站在巨人的肩膀上》，当然也应该问同样的问题.

在我国数学书的市场上，除了专门著作和教科书之外，大量辅导教材、题典、题解等形成了一种独特的风景线，它们与少量的长知识、启发思想的普及读物形成强烈的反差.这在某种程度上反映应试教育和素质教育的差别.可是《站在巨人的肩膀上》远远超过这个狭小的范围，而从更高、更广的眼光来看待跨世纪的数学和数学教育，这种著作在国内市场上真可以说是绝无仅有.

面临21世纪，谁都看得出未来世界与今天的世界肯定大不相同，其中的关键因素当然是计算机和网络，而数学在其中的作用更是不可低估.就在刚刚召开的1998年国际数学家大会上，一位数学家在大会上致词中引用前些时一次会议的主题：

高技术本质上是数学技术.

我想，再也不用多说什么了.未来的各行各业都要或多或少地用到数学，用到数学思维，用到数学方法，用到数学技术.因此，对于21世纪的人才培养，自然向数学教育提出了新的课题、新的挑战.看来，应试教育的缺点越来越暴露出来了.教育改革应该提到议事日程上来.

《站在巨人的肩膀上》就是面对这种局势而组织编写的.组织者是美国最权威的机构——国家研究委员会.参与工作的人不乏数学大家.当然国外的权威机构不同于国内的权力机构,它只提出参考意见.做不做由你.

说实在的,这些内容同我们学校的数学教学差别之大实在令人吃惊,用时髦的话来讲,可说两者是互补的.本书在"模式"的总主题下,分别论述了维数、数量、不确定性、形状和变化这五个主题.这些显然是数学的最基本的内容,可是在学校的教材中却很少反映出来.从这个意义上讲,它指出学习真正的有用的数学的一条捷径.同时,它的内容跨度也非常大,从幼儿园通过小学、中学、一直到大学乃至当代科学前沿的内容都有,例如深入浅出地介绍微积分的观念,统计的方法以及当代热门——混沌的概念.

与其说这本书给学生阅读,毋宁说它主要的读者是教师,从幼儿园教师,小学教师到中学教师,大学教师都能从中获益,首先是加深他们对数学的理解.要是他们能够把书中的内容创造性地应用在教学实践中,则学生素质的提高将不是一句空话.

计算机时代的来临必定提出全新的课题:如何把计算机与数学教学结合起来.本书在这方面做出许多有启发性的论述.在80年代曾经盛行一时的论调,诸如用计算器使学生不会计算等悲观说法,现在已经完全变了.当今计算机不仅不妨碍学生学习数学,而且推动学生学习数学,独立地发现数学.创造性地解决问题,使得学习数学与计算机使用形成互相促进,相得益彰的局面.这对我国的数学教学的改革无疑具有很大的借鉴意义.

总之,这本书每一页都包含极为丰富的内容,只要深入去挖掘,必定有所收获.特别对于大学、中学从事教学的理论和实践的老师们,有非常重要的参考价值.

本书由胡作玄、邓明立、赵慧琪、魏利、杨春宏等翻译，最后由胡作玄统一校订．由于本书文字远较普通数学文献为难，涉及知识面广，错误疏漏之处，欢迎专家、读者指正．

胡作玄

1999 年 2 月